Feuille de TD 1 : Espaces vectoriels normés

I. Inégalité triangulaire

Exercice 1

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé. Soient $x, y \in E$ et $r \geq 0$. Montrer que $x + \overline{B}(y, r) = \overline{B}(x + y, r)$.

Exercice 2

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé, $E \neq \{0_E\}$. Montrer que deux boules fermées de E , $\overline{B}(a, r)$ et $\overline{B}(a', r')$ sont égales si et seulement si $a = a'$ et $r = r'$.

II. Équivalence de normes

Exercice 3

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on pose :

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad N_2(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{et } N_\infty(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

1. Montrer que N_1 , N_2 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.
2. Établir les inégalités : $N_\infty \leq N_1 \leq nN_\infty$ et $N_2 \leq N_1 \leq \sqrt{n}N_2$.

Exercice 4

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout $f \in E$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

1. Vérifier que $\| \cdot \|_\infty$ et $\| \cdot \|_1$ sont deux normes sur E .
2. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.
3. En utilisant la suite des fonctions $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 5

Sur l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, $E = \mathbb{R}[X]$, on définit les applications N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E .
2. Étudier pour chacune de ces deux normes la convergence de la suite $(\frac{1}{n}X^n)_{n \geq 1}$.
3. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes?

Exercice 6

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les expressions suivantes définissent des normes sur E :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|,$$

$$\|f\|_3 = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

On notera d_i les distances associées et E_i les espaces métriques correspondants.

2. Montrer que pour tout f de E , $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|_3$, et que la convergence pour les normes $\| \cdot \|_\infty$, et $\| \cdot \|_3$, implique la convergence simple. Montrer que l'application identique de E_3 dans E_∞ est uniformément continue.
3. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite d'éléments de E définie par : $\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Montrer que cette suite tend vers 0 dans E_∞ . En est-il de même dans E_3 ? En déduire que l'application identique de E_∞ dans E_3 n'est pas continue.
4. Montrer qu'aucune suite extraite de $(f_n)_{n \geq 1}$ n'a de limite dans E_3 .
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $(g_n)_{n \geq 1}$ la suite d'éléments de E définie par : $\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], g_n(x) = \frac{x^n}{n^\alpha}$. Pour quelles valeurs de α la suite est-elle convergente pour chacune des normes précédentes ? On montrera dans chaque cas que pour les autres valeurs de α la suite n'a aucune limite.

Exercice 7

Soit $\ell^1(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites de nombres réels $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $N_1(x) = \sum |x_n|$ est convergente.

1. Montrer que $\ell^1(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'application $x \rightarrow N_1(x)$ de $\ell^1(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}^+$ est une norme sur $\ell^1(\mathbb{N})$.
3. Montrer que l'application $x \rightarrow N_\infty(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ de $\ell^1(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}^+$ est bien définie et est une norme sur $\ell^1(\mathbb{N})$.
4. Déterminer pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la suite $x = (1, a, a^2, \dots, a^n, \dots)$ appartient à $\ell^1(\mathbb{N})$ et calculer $N_1(x)$ et $N_\infty(x)$.
5. Les normes N_1 et N_∞ sont-elles équivalentes ?

III. Convergence simple et uniforme

Exercice 8

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathcal{C}([0, 1])$ définie par $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in [0, 1]$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Pour $0 < a < 1$ y a-t-il convergence uniforme sur $[0, a]$?
3. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, 1]$?

Exercice 9

1. Montrer que les applications définies sur $\mathcal{C}([0, \pi])$ par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^\pi |f(x)| dx$$

sont des normes.

2. On considère la suite de fonctions de $\mathcal{C}([0, \pi])$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $f_n(x) = \sqrt{n} \cos x \sin^n x$, pour tout $x \in [0, \pi]$.
 - a. Montrer que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente pour tout $x \in [0, \pi]$.
 - b. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas uniformément convergente.
 - c. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle au sens de $\|\cdot\|_\infty$? au sens de $\|\cdot\|_1$?