

Feuille de TD 2 : Espaces de Banach

Exercice 1

Soit $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des suites réelles qui tendent vers 0.

1. Montrer que $\mathcal{S}_0$ est un espace vectoriel et que l'application $N_\infty : x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ est une norme sur E .

2. Montrer que $(\mathcal{S}_0, N_\infty)$ est complet.

Exercice 2

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ -nx + \frac{n}{2} + 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $f_n \in E$ et que $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|_1)$.

2. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

3. L'espace normé $(E, \|\cdot\|_1)$ est-il complet ?

Exercice 3

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}$. On définit sur E les normes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \text{ et } N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définie à l'exercice 2 et on pose pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0, 1]$, $g_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$. À l'aide de la suite $(g_n)_{n \geq 1}$, montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas un espace de Banach.

2. Montrer que (E, N) est un espace de Banach.

Exercice 4

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé, $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach, et $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F , muni de la norme:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

Montrer que $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.