

Feuille de TD 3 : Applications linéaires continues

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Montrer que l'application $T : E \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$T(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

est une application linéaire continue. Calculer sa norme.

Exercice 2

On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ et on définit l'application $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $u(f) = f(1)$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$.

Montrer que u n'est pas continue.

Indication : on pourra utiliser la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \sqrt{n} x^n$.

2. On munit maintenant E de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

L'application u est-elle continue de E dans $\mathbb{R}$?

Exercice 3

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des polynômes à coefficients complexes muni de la norme définie par :

$$\|P\| = \sup_{0 \leq k \leq p} |a_k|, \text{ pour } P = \sum_{k=0}^p a_k X^k.$$

Soit u l'application de E dans E définie par $u(P) = P'$. Montrer que u n'est pas continue.

Exercice 4

Soit $E = \mathcal{C}([a, b])$. Soit p une fonction continue sur $[a, b]$. Pour $f \in E$, on pose :

$$[\Phi(f)](x) = \int_a^x f(t)p(t) dt, \quad \text{pour tout } a \leq x \leq b.$$

1. Définir une norme sur E pour laquelle E est un espace de Banach.

2. Montrer que si f est continue, alors $\Phi(f)$ est continue.

3. Montrer que l'application Φ qui à f associe $\Phi(f)$ est un endomorphisme continu de E . Montrer que

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \int_a^b |p(t)| dt.$$

4. On suppose que $p \geq 0$. Par un choix simple de f , montrer que $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} = \int_a^b |p(t)| dt$.

5. (Dans cette question, on ne suppose pas que $p \geq 0$). On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b], f_n(t) = \frac{np(t)}{\sqrt{1 + n^2(p(t))^2}}.$$

Montrer que $f_n \in E$. Calculer $\|\Phi(f_n)\|$. En déduire

$$\text{que } \|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} = \int_a^b |p(t)| dt.$$

Exercice 5

Soit $l^\infty(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muni de la norme

$$\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|,$$

et soit f l'application de $l^\infty(\mathbb{N})$ dans lui-même définie par $f(u) = v$ où $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n.$$

Montrer que f est une application linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 6

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé complet et u une application linéaire continue de E dans lui-même, de norme strictement inférieure à 1. Montrer que $\text{Id} + u$ est inversible et

$$(\text{Id} + u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n.$$

Montrer que l'on a de plus

$$\|(\text{Id} + u)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|u\|}.$$

Exercice 7

Soit $X = \mathcal{C}([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit K l'opérateur de X dans X défini par :

$$\forall f \in X, \forall x \in [0, 1], (Kf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que K est une application linéaire et continue de X dans X .
2. Soit $n \geq 1$ un entier. On pose $K^n = K \circ \dots \circ K$ composé n fois de K avec lui-même. Montrer par récurrence que K^n est l'application de X dans X qui à f associe la fonction :

$$(K^n f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt.$$

3. Montrer que $\|K^n\|_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{n!}$.
4. Montrer qu'il existe une application linéaire continue de X dans lui-même notée B telle que $B(I - K) = (I - K)B = I$.

Exercice 8

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit u un endomorphisme de E vérifiant pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k.$$

1. Simplifier $v_n \circ (u - \text{Id})$.
2. Montrer que $\text{Ker}(u - \text{Id}) \cap \text{Im}(u - \text{Id}) = \{0\}$.
3. On suppose désormais que E est de dimension finie. Démontrer que $\text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}) = E$.
4. Soit p la projection sur $\text{Ker}(u - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Im}(u - \text{Id})$. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $v_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p(x)$.