Feuille de TD 4 : Espaces de Hilbert

Exercice 1
Les applications suivantes sont-elles des produits scalaires sur les espaces indiqués ? Justifier votre réponse.
1. $((x, y), (x', y')) \mapsto xx' - yy'$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.
3. $(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$ sur $C^1([0, 1], \mathbb{R})$.
4. $(P, Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$. Ce résultat est-il encore vrai sur $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 2

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer, pour toute $f \in E$, l'inégalité

$$\left|\int_0^1 f(t)\sin \pi t dt\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 3

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, l'espace des matrices symétriques réelles d'ordre n. Montrer que

$$(\mathrm{tr}(AB + BA))^2 \leqslant 4\mathrm{tr}(A^2)\mathrm{tr}(B^2).$$

Exercice 4

Soient $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

et H le sous espace vectoriel des fonctions impaires. Déterminer l'orthogonal $H^\perp$ de H.

Exercice 5

Dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ on considère l'ensemble :

$$F = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \forall p \in \mathbb{N},\ x_{2p} = x_{2p+1}\}.$$

1. Vérifier que F est un sous espace vectoriel fermé de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
2. Décrire $F^\perp$.
3. Décomposer x suivant F et $F^\perp$.

Exercice 6

Soit H l'espace $L^2([0, \pi])$, muni du produit scalaire $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x$ et de la norme associée.
1. On note e_1 et e_2 les fonctions de H définies pour tout $x \in [0, \pi]$ par

$$e_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x \quad \text{et} \quad e_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x.$$

Vérifier que (e_1, e_2) est orthonormée.
2. Soit, pour toute fonction f de H et pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$Af(x) = \int_0^\pi \sin(x + t)f(t)dt.$$

Dire brièvement pourquoi on définit ainsi un opérateur linéaire continu A de H dans lui-même. Exprimer Af en fonction des produits scalaires $\langle f|e_1\rangle$ et $\langle f|e_2\rangle$.
3. En déduire la valeur de $|||A|||$.

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels.
On se donne $n+1$ nombres réels distincts $a_0, \cdots, a_n$, et on pose pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P|Q\rangle = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i).$$

1. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2.a. Soient $b_0, \cdots, b_n$, $n + 1$ nombres réels non nécessairement distincts. Rappeler comment on peut trouver un polynôme L de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $L(a_i) = b_i$ pour $i = 0, \cdots, n$ (polynômes d'interpolation de Lagrange).
2.b. Montrer que pour tout $k \leq n$, il existe $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ tel que pour tout $Q \in \mathbb{R}_k[X]$ on ait

$$\sum_{i=0}^n (P_k(a_i) - b_i)^2 \leq \sum_{i=0}^n (Q(a_i) - b_i)^2.$$

Exercice 8

Soit $H = L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. Donner une expression de la projection orthogonale de $t \mapsto \mathrm{e}^{-3t}$ sur le sous-espace vectoriel fermé

$$V = \left\{ f \in H,\ \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

Exercice 9

Calculer le minimum de $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \,\mathrm{d}t$ pour (a,b) parcourant $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10

On considère l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ muni du produit scalaire usuel. Pour $n \in \mathbb{N}$ un entier fixé, on pose

$$F = \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

1. Vérifier que F est un sous-espace fermé de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

2. Chercher un sous-espace G tel que $F \overset{\perp}{\oplus} G = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

3. Donner la distance de l'élément $(1, 0, 0, \dots)$ à F.

Exercice 11

Soit H un espace de Hilbert et A un endomorphisme continu de H.
1. Montrer que la forme linéaire $\phi_y : x \mapsto \langle y | Ax \rangle$ est continue. En déduire qu'il existe un vecteur A^*y tel que $\forall x \in H, \quad \langle y|Ax\rangle = \langle A^*y|x\rangle$.
2. Montrer que $y \mapsto A^*y$ est un endomorphisme continu de H. On appelle A^* l'adjoint de A.
3. Vérifier que $(A^*)^* = A$ et $||A^*|| = ||A||$.
4. Soit $H = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Calculer la matrice de A^* dans la base canonique en fonction de celle de A.
5. Soit T l'application linéaire définie sur $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ par

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}),\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (Tu)_n = u_{n+1}.$$

Calculer l'adjoint T^* de T.