

Feuille de TD 5 : Séries de Fourier

Exercice 1

Soit f la fonction 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie en tout $x \in [-\pi, \pi]$ par : $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$.

1. Déterminer la série de Fourier de f et montrer qu'elle converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f .

2. En déduire les sommes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

3. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}.$$

4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 2

Soit $f(\theta)$ la fonction périodique de période 2π qui sur $[-\pi, \pi]$ vaut 1 si $\theta \geq 0$ et -1 si $\theta < 0$.

1. Décomposer f en série de Fourier. En quel sens a lieu la convergence de la série vers la fonction f .

2. La série converge-t-elle uniformément sur $[-\pi, \pi]$?

3. Calculer la somme $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

Exercice 3

Soit g la fonction 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie en tout $x \in [-\pi, \pi[$ par $g(x) = e^{\alpha x}$, où α est un nombre réel non nul.

1. Déterminer la série de Fourier de g .

2. En déduire l'expression de $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}$ pour α non nul.

Exercice 4

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π -périodique, impaire, définie en tout $x \in [0, \pi]$ par : $f(x) = (\sin x)^2$.

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f' est somme de sa série de Fourier et la déterminer.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application 2π -périodique de classe C^1 telle que $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$$

et caractériser l'égalité.

Exercice 6

On considère une barre métallique de longueur L qu'on représente par le segment $[0, L]$. La température à l'instant t au point d'abscisse x est noté $u(x, t)$. On pose $Q =]0, L[\times]0, +\infty[$. La fonction u est supposée continue sur $\bar{Q}$ et de classe C^∞ sur Q . Elle vérifie en outre les conditions suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{si } (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = h(x) \quad \text{si } x \in [0, L] \quad (2)$$

où h est une fonction de classe C^1 sur $[0, L]$ avec $h(0) = h(L) = 0$,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{si } t \in [0, +\infty[. \quad (3)$$

1. Montrer que si la fonction u s'écrit sous la forme $u(x, t) = f(x)g(t)$ (où f et g ne s'annulent pas sur Q) et si u est solution de (1), alors les fonctions f et g vérifient chacune une équation différentielle simple.

2. Résoudre ces équations différentielles en tenant compte de (3). En déduire qu'une fonction qui s'écrit

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

vérifie (1) et (3).

3. Soit $\tilde{h}$ la fonction déduite de h par imparité et $2L$ -périodicité. Développer $\tilde{h}$ en série de Fourier. Quelles valeurs donner aux coefficients a_n pour que (2) soit vérifiée?

4. Justifier l'existence d'une fonction u vérifiant les conditions (1), (2) et (3).