Feuille de TD 6 : Calcul différentiel

Dérivées partielles

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = (\cos x + \sin y, -\sin x + \cos y, 2 \sin x \cos y)$$

$$g(u, v, w) = u^2 + v^2 + w.$$

Calculer les matrices jacobiniennes $J_M(f)$ et $J_N(g)$ aux points $M = (x, y)$ et $N = (u, v, w)$. Calculer $J_M(g \circ f)$.

Exercice 2

Soit D l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$. Trouver les applications de classe C^1 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2.$$

On utilisera le changement de variables $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$.

Exercice 3

Une fonction $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 est dite harmonique sur Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$ lorsque son laplacien est nul sur Ω :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Soit u une fonction harmonique que l'on suppose de plus radiale, *i.e.*, il existe $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$.

1. Montrer que φ' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sur $\mathbb{R}_+$.
2. En déduire l'ensemble des fonctions harmoniques radiales dans le plan privé de $(0, 0)$.

Différentielles

Exercice 4

Écrire les différentielles des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto xy$.

2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$.

Exercice 5

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = M^3.$$

Justifier que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 6

Soit

$$\phi : \begin{array}{ccc} \text{GL}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^{-1} \end{array}$$

1. Montrer que ϕ est différentiable en I_n et calculer sa différentielle en ce point.
2. En déduire que ϕ est différentiable en tout point et calculer sa différentielle.

Exercice 7

1. Soit une forme bilinéaire continue $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Montrer que sa différentielle au point (a_1, a_2) est

$$d_{(a_1, a_2)} f(h_1, h_2) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2).$$

2. Soit $x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ une norme définie sur un espace vectoriel E par un produit scalaire. Écrire la différentielle de cette application pour $x \neq 0$.

Exercice 8

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne naturelle. Montrer que l'application $f : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Donner l'expression de sa différentielle, quel est son rang?

Exercice 9

Montrer que l'application

$$f : P \mapsto \int_0^1 P(t)^2 dt$$

définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ est différentiable et exprimer sa différentielle.

Exercice 10

Montrer que l'application $J : u \mapsto u^2$ est différentiable de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$ munis de leurs normes habituelles.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2.$$

Montrer que f est constante.

Inversion locale et fonctions implicites

Exercice 12

Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (xe^y, xe^{-y})$.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier l'existence d'un inverse local $(x, y) = g(u, v)$ dans un voisinage du point (a, b) .
2. Dans le cas où l'inverse local g existe, donner sa forme explicite et calculer $d_{(u,v)}g$.

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle qu'il existe $k > 0$ vérifiant, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|.$$

1. Démontrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
2. Démontrer que df_x est inversible en tout point x de $\mathbb{R}^n$.
3. En déduire que f est un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 14

Montrer que le sous ensemble Γ de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0\}$$

est, au voisinage de $(0, 1)$ le graphe d'une fonction $x \mapsto y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 1$.

Exercice 15

1. Montrer que l'équation : $\log(1 + y - z) - x - z = 0$ définit au voisinage de $(0, 0, 0)$ une fonction implicite $(x, y) \mapsto \phi(x, y) = z$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en $(0, 0)$ de la fonction $(x, y) \mapsto z = \phi(x, y)$.

Exercice 16

On note E l'espace vectoriel $C([0, 1])$ normé par $\|\cdot\|_\infty$. Soit $F : E \rightarrow E$ l'application définie par

$$F(\varphi) = \varphi e^\varphi + \int_0^1 \varphi(x)^2 dx.$$

1. Montrer que $d_\varphi F \cdot (h) = e^\varphi h + \varphi e^\varphi h + 2 \int_0^1 \varphi(x)h(x)dx$.
2. En déduire qu'il existe un voisinage U de 0 dans E tel que, pour tout ψ dans U , l'équation

$$\psi = \varphi e^\varphi + \int_0^1 \varphi(x)^2 dx$$

admet une solution unique dans un voisinage de 0.

Extrema locaux et globaux

Exercice 17

Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

1.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2 \end{array}$$

2.

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & y(x^2 + (\ln y)^2) \end{array}$$

3.

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^4 + y^4 - 4xy \end{array}$$

Exercice 18

Trouver les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$ et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.