Exercice 3

1. • Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) = \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(x+i\varepsilon)\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

Soit $[-a,a] \subset \mathbb{R}$, $a>0$, tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$.

Alors :
$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) = \int_{-a}^{a} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

On écrit $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\,du$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

et $\operatorname{supp}\psi \subset [-a,a]$. Alors :

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) = \underbrace{\int_{-a}^{a} \frac{x\varphi(0)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx}_{=0 \text{ par imparité}} + \int_{-a}^{a} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)\,dx$$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \psi(x)\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$

et $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathbb{1}_{[-a,a]}(x)\right| \leqslant |\psi(x)|\,\mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Donc, par le théorème de convergence dominée, on a :

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_{-a}^{a} \psi(x)\,dx = \langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi\rangle$$

Donc la limite existe et vaut $\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle$.

- Soient $\varepsilon>0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a ; pour $[-a,a]\subset\mathbb{R}$, $a>0$, tel que $\mathrm{supp}\,\varphi \subset [-a,a]$,

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{\varepsilon\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx$$

Si on pose $y = x/\varepsilon$, alors $dx = \varepsilon\,dy$ et :

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) = \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \frac{\varepsilon\varphi(\varepsilon y)}{(\varepsilon y)^2+\varepsilon^2}\,\varepsilon\,dy = \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2}\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2}\,\mathbb{1}_{[-a/\varepsilon,\,a/\varepsilon]}(y)\,dy$$

Or, $\forall \varepsilon>0, \forall y\in\mathbb{R}$, $\left|\frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2}\,\mathbb{1}_{[-a/\varepsilon,\,a/\varepsilon]}(y)\right| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{1+y^2} \in L^1(\mathbb{R})$

et $\forall y\in\mathbb{R}$, $\frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2}\,\mathbb{1}_{[-a/\varepsilon,\,a/\varepsilon]}(y) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \frac{\varphi(0)}{1+y^2}$

Par le théorème de convergence dominée :

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(0)}{1+y^2}\,dy = \pi\varphi(0) = \pi\langle\delta_0,\varphi\rangle.$$

Donc la limite existe et vaut $\pi\langle\delta_0,\varphi\rangle$.

2. On en déduit que l'expression $\langle T,\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon}\,dx$ est bien définie et vaut : $\langle T,\varphi\rangle = \langle vp(\frac{1}{x}),\varphi\rangle + i\pi\langle\delta_0,\varphi\rangle$.

Soit encore $T = vp(\frac{1}{x}) + i\pi\delta_0$ qui est une distribution d'ordre 1.

Exercice 4 :

1. Soit $[-a,a]^2 \subset \mathbb{R}^2$ $(a>0)$ un compact et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]^2$.

Alors:

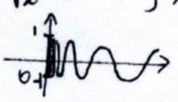
$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\int_0^{+\infty}\left(\varphi\left(\frac{1}{t^2},\sin t\right)-\varphi(0,\sin t)\right)dt\right| = \left|\int_0^{+\infty}\underbrace{\int_0^1 \partial_x\varphi\left(\frac{s}{t^2},\sin t\right)\frac{ds}{t^2}}_{=\left[\varphi\left(\frac{s}{t^2},\sin t\right)\right]_0^1}dt\right|$$

$$\leq \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty}\left|\int_0^1 \partial_x\varphi\left(\frac{s}{t^2},\sin t\right)\right|ds\,\frac{dt}{t^2}$$

$$\leq \|\partial_x\varphi\|_\infty \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty}\frac{dt}{t^2} = \|\partial_x\varphi\|_\infty\left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{+\infty} = \sqrt{a}\,\|\partial_x\varphi\|_\infty .$$

Comme T est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, cette estimée de $|\langle T,\varphi\rangle|$ nous dit que T est une distribution d'ordre au plus 1

2. Montrons que si $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=\sin\frac{1}{\sqrt{x}},\ x>0\right\}$, alors $\operatorname{supp}T=\overline{S}=S\cup(\{0\}\times[-1,1])$.

 $\overline{S}$

- Soit $x_0\notin\overline{S}$. Alors, il existe $\varepsilon>0$, $\overline{B}(x_0,\varepsilon)\subset\overline{S}^c$.

  Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset\overline{B}(x_0,\varepsilon)$. Alors par définition de T, $\langle T,\varphi\rangle=0$ car: $\forall t>0$, $\left(\frac{1}{t^2},\sin t\right)\notin\overline{B}(x_0,\varepsilon)$ et $(0,\sin t)\notin\overline{B}(x_0,\varepsilon)$

  Donc $x_0\notin\operatorname{supp}T$ et $\operatorname{supp}T\subset\overline{S}$.

- Réciproquement, soit $x_0\in S$ et soit $\varepsilon>0$ tel que $B(x_0,\varepsilon)\cap(\{0\}\times[-1,1])=\emptyset$.

  Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\operatorname{supp}\varphi\subset B(x_0,\varepsilon)$, $\varphi=1$ sur $\overline{B}(x_0,\frac{\varepsilon}{2})$ et $\varphi\geq0$. Alors:

$$\langle T,\varphi\rangle=\int_0^{+\infty}\varphi\left(\frac{1}{t^2},\sin t\right)dt \geq t_2-t_1>0 .$$

où t_1 est tel que $x_0=\left(\frac{1}{t_1^2},\sin t_1\right)$ et $t_2=\inf\left\{t>t_1,\ \left(\frac{1}{t^2},\sin t\right)\notin\overline{B}(x_0,\frac{\varepsilon}{2})\right\}$

Alors, T est non nulle au voisinage de x_0 et $S\subset\operatorname{supp}T$. Comme $\operatorname{supp}T$ est fermé, $\overline{S}\subset\operatorname{supp}T$ et finalement, $\operatorname{supp}T=\overline{S}$.

Exercice 5 - Partie finie de x^α

1. Soit $[-a,a]\subset\mathbb{R}$, $a>0$. Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\operatorname{supp}\varphi\subset[-a,a]$.

Pour $\alpha\in]-2,-1[$ et $\varepsilon>0$, on a :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} x^\alpha\varphi(x)\,dx = \int_\varepsilon^a x^\alpha\varphi(x)\,dx = \int_\varepsilon^a x^\alpha\varphi(0) + x^{\alpha+1}\psi(x)\,dx$$

avec $\psi(x)=\int_0^1\varphi'(xu)\,du$ et donc $\varphi(x)=\varphi(0)+x\psi(x)$.

Alors : $$\int_\varepsilon^{+\infty} x^\alpha\varphi(x)\,dx = \int_\varepsilon^a x^\alpha\varphi(0)\,dx + \int_\varepsilon^a x^{\alpha+1}\psi(x)\,dx.$$

On : $$\int_\varepsilon^a x^\alpha\varphi(0)\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(0)\right]_\varepsilon^a = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(0) - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1}\varphi(0)$$

On pose $A_\varphi = -\dfrac{\varphi(0)}{\alpha+1}$ et $R_\varepsilon = \displaystyle\int_\varepsilon^a x^{\alpha+1}\psi(x)\,dx + \frac{\varphi(0)}{\alpha+1}a^{\alpha+1}$

Comme $\alpha\in]-2,-1[$, $x\mapsto x^{\alpha+1}$ est intégrable au voisinage de 0, donc comme ψ est $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et bornée, $x\mapsto x^{\alpha+1}\psi(x)$ est aussi intégrable au voisinage de 0.

Donc R_ε possède une limite lorsque ε tend vers 0^+ :

$$\int_0^a x^{\alpha+1}\psi(x)\,dx + \frac{\varphi(0)}{\alpha+1}a^{\alpha+1}.$$

On a bien : $\int_\varepsilon^\infty x^\alpha\varphi(x)\,dx = A_\varphi\,\varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon$ avec R_ε possédant une limite en 0^+.

2. On pose : $$\langle pf(x^\alpha),\varphi\rangle = \frac{\varphi(0)}{\alpha+1}a^{\alpha+1} + \int_0^a x^{\alpha+1}\left(\int_0^1\varphi'(xu)\,du\right)dx.$$

Alors : $$|\langle pf(x^\alpha),\varphi\rangle| \leq C_0\|\varphi\|_\infty + C_1\|\varphi'\|_\infty$$

et $pf(x^\alpha)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

De plus : $\operatorname{supp} pf(x^\alpha) = \mathbb{R}_+$.