Exercice 1

(i) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle A_n, \varphi\rangle = \int_{-A}^{A} \sin(nx)\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\varphi(x)\right]_{-A}^{A}}_{=0} + \int_{-A}^{A} \frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)\,dx$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\langle A_n, \varphi\rangle| \leq \frac{1}{n}\int_{-A}^{A} |\varphi'(x)|\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(ii) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle B_n, \varphi\rangle = \int_{-A}^{A} n\, g(nx)\,\varphi(x)\,dx \underset{u=nx}{=} \int_{-nA}^{nA} g(u)\,\varphi\left(\frac{u}{n}\right)du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(u)\,\varphi\left(\frac{u}{n}\right) \mathbb{1}_{[-nA,nA]}(u)\,du.$$

Or : $g(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\mathbb{1}_{[-nA,nA]}(u) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(u)\varphi(0)$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

et : $\left|g(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\mathbb{1}_{[-nA,nA]}(u)\right| \leq |g(u)|\,\|\varphi\|_\infty \in L^1(\mathbb{R})$

Donc, par le théorème de convergence dominée :

$$\langle B_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} g(u)\,du$$

Donc $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\left(\int_{\mathbb{R}} g(u)\,du\right) \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(iii) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors:

$$\langle C_n, \varphi \rangle = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{p}{n}\right) \underset{\text{somme de Riemann}}{\xrightarrow[n\to+\infty]{}} \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx.$$

Donc $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la distribution associée à $\mathbb{1}_{[0,1]}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(iv) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A,A]$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\langle D_n, \varphi \rangle = \langle e^{inx}\, vp\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \langle vp\left(\tfrac{1}{x}\right), e^{inx}\varphi \rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{e^{inx}\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{A\geq|x|\geq\varepsilon} \cos(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + i \int_{A\geq|x|\geq\varepsilon} \sin(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right]$$

Pour la partie réelle :

On écrit $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\psi \subset [-A,A]$.

On a: $$\int_{A\geq|x|\geq\varepsilon} \cos(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0) \underbrace{\int_{A\geq|x|\geq\varepsilon} \cancel{\frac{\cos(nx)}{x}\,dx}}_{=0 \text{ par imparité}} + \int_{A\geq|x|\geq\varepsilon} \cos(nx)\psi(x)\,dx$$

Donc : $$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{A\geq|x|\geq\varepsilon} \cos(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{-A}^{A} \cos(nx)\psi(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pour la partie imaginaire : $$\int_{A\geq|x|\geq\varepsilon} \sin(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0)\int_{A\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\sin(nx)}{x}\,dx + \int_{A\geq|x|\geq\varepsilon} \psi(x)\sin(nx)\,dx$$

Donc : $$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{A\geq|x|\geq\varepsilon} \sin(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0)\underbrace{\int_{-A}^{A} \frac{\sin(nx)}{x}\,dx}_{\downarrow n\to+\infty \atop \pi} + \underbrace{\int_{-A}^{A} \sin(nx)\psi(x)\,dx}_{\downarrow n\to+\infty \atop 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi\varphi(0) + 0$$

Donc $\langle D_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} i\pi\varphi(0)$ et $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $i\pi\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2 :

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On écrit : $\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\,du$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \langle T_n, \varphi\rangle = n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$

$$= n\left(\cancel{\varphi(0)} + \frac{1}{n}\psi\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\varphi(0) - \frac{1}{n}\psi\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \psi\left(\frac{1}{n}\right) + \psi\left(-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\psi(0) = 2\int_0^1 \varphi'(0)\,du$$

$$= 2\varphi'(0)$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \langle T_n, \varphi\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\varphi'(0) = \langle 2\delta_0', \varphi\rangle$

Donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2\delta_0'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Or, pour tout n, T_n est d'ordre 0 et $2\delta_0'$ est d'ordre 1. En général, il n'y a pas de lien entre l'ordre des éléments de la suite et l'ordre de la limite.

Exercice 3 :

1. Soit $t \not\equiv 0\,[2\pi]$. Alors : $\displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = e^{-iNt} + \dots + 1 + \dots + e^{iNt}$

$$= e^{-iNt}\left[1 + \dots + e^{2iNt}\right]$$

$$= e^{-iNt}\,\frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$$

$$= \underbrace{e^{-iNt}\,e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}\,e^{-i\frac{t}{2}}}_{=1}\;\frac{e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t} - e^{-i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $F_N(t) = \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\langle T_N, \varphi\rangle = \int_{-(2M+1)\pi}^{(2M+1)\pi} F_N(t)\varphi(t)\,dt = \sum_{m=-M}^{M} \int_{2m\pi-\pi}^{2m\pi+\pi} F_N(t)\varphi(t)\,dt$$

$$\underset{u=t+2m\pi}{=} \sum_{m=-M}^{M} \int_{-\pi}^{\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par } 2\pi\text{ périodicité de } F_N}}{F_N(u)}\, \varphi(u-2m\pi)\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}} \underbrace{\sum_{m=-M}^{M} \varphi(u-2m\pi)}_{=\phi(u)}\,du$$

3. On écrit $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. D'où :

$$\forall N \in \mathbb{N},\quad \langle T_N, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\phi(0)\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\psi(t)\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t\,dt$$

Or, $t \mapsto \frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\psi(t) \in L^1([-\pi,\pi])$, donc par Riemann-Lebesgue la seconde intégrale tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

D'autre part :

$$\frac{\phi(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt = \phi(0)\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\,dt = \frac{\phi(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}\,dt$$

$$= \frac{\phi(0)}{2\pi}\times 2\pi = \phi(0)$$

Donc : $\langle T_N, \varphi\rangle \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \phi(0) = \sum_{k=-M}^{M}\varphi(2k\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi(2k\pi)$

$$= \Big\langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}, \varphi\Big\rangle.$$

Donc $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On en déduit la formule de Poisson :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{imx} = 2\pi\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta_{2\pi m}.$$

Exercice 5

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors: $\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle$

$$= -\int_0^\infty 1 \times \varphi'(x)\,dx$$

$$= -[\varphi(x)]_0^\infty + \int_0^\infty 0\,dx$$

Donc $H' = \delta_0$ $\qquad = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors: $\langle (\log|x|)', \varphi \rangle = -\langle \log|x|, \varphi' \rangle$

$\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$.

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \log|x|\,\varphi'(x)\,dx$$

Or: $\displaystyle\int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \log|x|\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + (\log\varepsilon)\,[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)]$

Or, en écrivant Taylor à l'ordre 1 pour φ, on obtient:

$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\,\psi(\varepsilon)$ avec $\psi(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$

$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\,\tilde{\psi}(\varepsilon)$ avec $\tilde{\psi}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$

Donc: $(\log\varepsilon)\,[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] = -(\varepsilon\log\varepsilon)\,(\psi(\varepsilon) + \tilde{\psi}(\varepsilon))$

Or $\varepsilon\log\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $(\log\varepsilon)\,[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$

et $\langle (\log|x|)', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc: $(\log|x|)' = vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, supp $\varphi \subset [-A, A]$. Alors:

$$\langle vp(\tfrac{1}{x})', \varphi \rangle = -\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi' \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\, dx$$

Or: $$\int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\, dx = \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-A}^{-\varepsilon} + \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{A} + \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx$$

$$= -\frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx$$

Or, $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \psi(\varepsilon)$ avec $\psi(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$

$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon \tilde{\psi}(\varepsilon)$ avec $\tilde{\psi}(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$

Donc: $$-\frac{\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} = -2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \underbrace{[\psi(\varepsilon) + \tilde{\psi}(-\varepsilon)]}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0}$$

D'où: $$\langle vp(\tfrac{1}{x})', \varphi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right] := -pf\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 6.

1. Soit $x_0 \in I$ et $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ une primitive de f. Alors, F est C^∞ sur I. De plus, l'équation différentielle $u' + fu = g$ est équivalente à $\frac{d}{dx}(e^F u) = e^F g$ qui a pour solution C^∞,

$$u_0(x) = e^{-F(x)}\left(\int_{x_0}^{x} e^{F(t)} g(t)\, dt + C\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Posons $T = u_0 + e^{-F} S$. Alors, on a:

$$g = T' + fT = u_0' + fu_0 + e^{-F}(S' - fS) + e^{-F} fS$$
$$= g + e^{-F} S'$$

D'où, $e^{-F} S' = 0$ et $S' = 0$. Alors S est une constante et $T = u_0 + Ce^{-F}$. Donc T est donnée par une fonction C^∞ qui vérifie l'équation au sens usuel.

Exercice 8 :

1. Comme l'équation différentielle $2xu'-u=0$ est singulière en 0, on cherche ses solutions localement intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ on trouve comme solutions : $u(x)=C_1\sqrt{x}$

Sur $\mathbb{R}_-^*$ on trouve comme solutions : $u(x)=C_2\sqrt{x}$.

On note $x_+=\max(x,0)$ et $x_-=\max(-x,0)$.

Les fonctions localement intégrables $u : x \mapsto C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}$ sont donc solutions de $2xu'-u=0$.

2.a. Les distributions associées aux fonctions $u : x \mapsto C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}$ sont solutions de $2xT'-T=0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Puis, soit $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de $2xT'-T=0$. Soit T_1 sa restriction à $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Soit $S_1=\frac{T_1}{\sqrt{x}}$.

Alors : $S_1'=\frac{T_1'}{\sqrt{x}}-\frac{T_1}{2x\sqrt{x}}=\frac{2xT_1'-T_1}{2x\sqrt{x}}=0$

Comme S_1 est définie sur un intervalle (convexe), il existe $C_1\in\mathbb{R}$ telle que $S_1=C_1$. D'où $T_1=C_1\sqrt{x_+}$.

De même : $T_2=C_2\sqrt{x_-}$.

b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_2, \varphi \rangle$

$$= \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - 0$$
$$= 0$$

Et si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^*)$, $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_2, \varphi \rangle$

$$= \langle T_2, \varphi \rangle - 0 - \langle T_2, \varphi \rangle$$
$$= 0.$$

Donc $\mathbb{R}_+^* \subset (\operatorname{supp} S)^c$ et $\mathbb{R}_-^* \subset (\operatorname{supp} S)^c$, donc $\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_-$ et $\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_+$.

Donc : $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$.

c. Soit $R = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$, $a_k \in \mathbb{C}$. Si $R = 0$ alors $2xR' - R = 0$.

Réciproquement, supposons que $2xR' - R = 0$ et montrons que $R = 0$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $k \geq 1$:

$$\langle 2x(\delta^{(k)})', \varphi \rangle = -\langle \delta^{(k)}, (2x\varphi)' \rangle$$
$$= -\langle \delta^{(k)}, 2\varphi \rangle - \langle \delta^{(k)}, 2x\varphi' \rangle$$
$$= 2(-1)^{k+1}\left(2\varphi^{(k)}(0) + (2x\varphi')^{(k)}(0)\right)$$
$$= 2(-1)^{k+1}(k+1)\varphi^{(k)}(0)$$

Donc $2xR' - R = \sum_{k=0}^{p} \left(2(-1)^{k+1}(k+1) - 1\right) a_k \delta^{(k)}$

Or $2xR' - R = 0$, donc $a_k = 0$ pour tout k et $R = 0$.

d. Comme par b., $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$, S s'écrit $S = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$.

Si T est solution de $2xT' - T = 0$, alors S aussi et donc par c., $S = 0$.

Ainsi, $T = T_1 + T_2 = C_1\sqrt{x_+} + C_2\sqrt{x_-}$ ~~sont~~ les solutions de $2xT' - T = 0$.

2. La forme du second membre δ_0 nous incite à chercher une solution particulière qui soit combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en 0. Or, par c., il suffit de prendre une masse de Dirac en 0 et en injectant cette distribution $a_0\delta_0$ dans l'équation, on en tire : $(2(-1)(1) - 1)a_0 = 1$ soit $a_0 = -\frac{1}{3}$.

Donc les solutions de l'équation différentielle $2xT' - T = \delta_0$ sont les

$$C_1 \sqrt{x_+} + C_2 \sqrt{x_-} - \frac{1}{3}\delta_0 .$$

3. On note $T_0 = C_1 \sqrt{x_+} + C_2 \sqrt{x_-} - \frac{1}{3}\delta_0$. Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors $T_0 * f$ est solution de $2xT' - T = f$.

En effet : $2x(T_0 * f)' - T_0 * f = 2x\, T_0' * f - T_0 * f = (2x\, T_0' - T_0) * f = \delta_0 * f$
$= f$.

Et $T_0 * f = C_1 \sqrt{x_+} * f + C_2 \sqrt{x_-} * f - \frac{1}{3} f$

convolution des fonctions

Exercice 9

1. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$.
Posons $K_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,h(x)) \in K\}$ qui est compact car K l'est et h est un C^1-difféo.

Alors : $|\langle T,\varphi\rangle| \leq \left(\int_{K_1} dx\right) \sup_{(x,y)\in K} |\varphi(x,y)| \leq C\,\|\varphi\|_\infty$.

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0 donc d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit D la courbe $D = \{(x,h(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $\operatorname{supp} T = D$.
Tout d'abord, soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$. Alors $\varphi(x,h(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\langle T,\varphi\rangle = 0$. Donc $D^c \subset (\operatorname{supp} T)^c$ et $\operatorname{supp} T \subset D$.
Réciproquement, montrons que tout point $M_0 = (x_0, h(x_0)) \in D$ est dans $\operatorname{supp} T$.
Soit $\delta > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction positive, avec $\operatorname{supp}\varphi \subset B(M_0,\delta)$ et $\varphi(x,y) = 1$ pour tout $(x,y) \in B(M_0, \delta/2)$. Soit $K_\delta = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,h(x)) \in B(M_0,\delta)\}$.

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\int_{K_\delta} \varphi(x,h(x))\,dx\right| \geq \int_{K_{\delta/2}} \underbrace{\varphi(x,h(x))}_{=1}\,dx$$
$$\geq \operatorname{Leb}(K_{\delta/2}) > 0$$

où $K_{\delta/2} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x,h(x)) \in B(M_0, \delta/2)\}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive. Donc T est non nulle au voisinage de M_0, donc $M_0 \in \operatorname{supp} T$.

Ainsi $D \subset \operatorname{supp} T$ et $D = \operatorname{supp} T$.

3. Si T est la distribution T_f associée à une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ f, alors $\operatorname{supp} T = \operatorname{supp} f$ où $\operatorname{supp} f$ est le support de f au sens des fonctions continues. Alors, f serait nulle en dehors de D qui est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$, donc T_f serait nulle. Or T est non nulle.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Soit $\phi(x) = \varphi(x,h(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,h(x)) + h'(x)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,h(x))$

D'où : $\langle \partial_x T + h'(x)\partial_y T, \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}} (\partial_x \varphi + h'(x)\partial_y \varphi)(x,h(x))\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi'(x)\,dx$
$= [\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ car ϕ est à support compact.

Donc : $(\partial_x + h'(x)\partial_y) T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.