

Exercice 1 :

1. Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme P tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq |P(x)|$.

$$\text{Alors : } \forall x \in \mathbb{R}, |\cos(e^x)| \leq \frac{|P(x)|}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(e^x) = 0$. Or, si on considère la

suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1, x_n = \log(2n\pi)$, on a :

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ et } \forall n \geq 1, \cos(e^{x_n}) = \cos(2n\pi) = 1.$$

Donc, on ne peut pas avoir $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(e^x) = 0$.

2. Soit $q \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soient m et M dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\int_m^M q(x) dx = \int_m^M q(x) \underbrace{e^x \cos(e^x)}_{\frac{d}{dx}(\sin(e^x))} dx = [q(x) \sin(e^x)]_m^M - \int_m^M q'(x) \sin(e^x) dx$$

$$\text{Alors : } |q(M) \sin(e^M) - q(m) \sin(e^m)| \leq |q(M)| + |q(m)|$$

$$\text{Or : } |q(m)| \xrightarrow[m \rightarrow -\infty]{} 0 \text{ et } |q(M)| \xrightarrow[M \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ car } q \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Puis, comme : $\forall x \in \mathbb{R}, |q'(x) \sin(e^x)| \leq |q'(x)|$ et que

$q' \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} q'(x) \sin(e^x) dx$ est absolument convergente.

On en déduit que $\int_{\mathbb{R}} f(x) q(x) dx$ est convergente.

3. Soit $q \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$.

$$|\langle S, q \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) q(x) dx \right|$$

$$\text{par } \leq \rightarrow \leq \int_{\mathbb{R}} |\sin(e^x) q'(x)| dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{1+x^2} |q'(x)| dx$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} ((1+x^2) |q'(x)|) \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

$$\leq \pi \sup_{x \in \mathbb{R}} ((1+x^2) |q'(x)|)$$

Donc S est bien une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a : $\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-ia\xi}$. Puis par inversion de Fourier, $\mathcal{F}\mathcal{F}(\delta_a) = \mathcal{F}(e^{-ia\xi})$ avec $\mathcal{F}\mathcal{F} = 2\pi \sigma$ où $\sigma: \xi \mapsto -\xi$. D'où : $\delta_a = \frac{\sigma}{2\pi} \mathcal{F}(e^{-ia\xi}) = \frac{\mathcal{F}(e^{ia\xi})}{2\pi}$.
Donc : $\boxed{\mathcal{F}(e^{iax}) = 2\pi \delta_a}$

2. On écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

D'où, par linéarité de $\mathcal{F}$ et par 1 :

$$\mathcal{F}(\cos x) = \frac{1}{2} (\mathcal{F}(e^{ix}) + \mathcal{F}(e^{-ix})) = \pi(\delta_{-1} + \delta_1)$$

3. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x \sin x) &= i \partial_\xi \mathcal{F}(\sin x) = i \partial_\xi \left(\frac{\pi}{i} \delta_{-1} - \delta_1 \right) \\ &= \pi(\delta'_{-1} + \delta'_1). \end{aligned}$$

4. Méthode directe : Si $u = \mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, comme $\sin x = \frac{\sin x}{x} \times x$,

$$\text{on a : } i u' = \mathcal{F}(\sin x), \text{ d'où : } u' = \mathcal{F}\left(-i x \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\text{et par 3 : } u' = -\pi(\delta_1 - \delta_{-1}) \quad (*)$$

$$\text{Alors : } u'|_{]-\infty, -1[} = 0, \quad u'|_{]-1, 1[} = 0 \quad \text{et } u'|_{]1, \infty[} = 0$$

$$\Rightarrow u|_{]-\infty, -1[} = a \quad \Rightarrow u|_{]-1, 1[} = b \quad \Rightarrow u|_{]1, \infty[} = c$$

Si on pose $\tilde{u} = \begin{cases} a & \text{si } x < -1 \\ b & \text{si } -1 < x < 1 \\ c & \text{si } x > 1 \end{cases}$, alors, par la formule

$$\text{des sauts : } \tilde{u}' = (b-a)\delta_{-1} + (c-b)\delta_1 \quad \text{et on veut } a, b, c \text{ tels que :}$$

$$b-a = \pi \quad \text{et } c-b = -\pi. \quad \text{Cela conduit à } c=a \text{ et } b=\pi+a.$$

$$\text{Alors : } \tilde{u} = a + \pi \mathbb{1}_{]-1, 1[} \text{ est solution de } (*). \text{ D'où la solution}$$

$$\text{générale de } (*): \quad u = \tilde{u} + ct = A + \pi \mathbb{1}_{]-1, 1[}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

On, $\frac{\sin x}{x} \in L^2(\mathbb{R})$, donc par le théorème de Plancherel,

$\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) \in L^2(\mathbb{R})$. Donc, comme la constante A n'est pas $L^2(\mathbb{R})$, hormis si elle est nulle, on doit avoir $A=0$.

Finalement: $\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \pi \mathbb{1}_{]-1,1[}$.

Méthode inverse: On a: $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{]-1,1[}(x)) = \int_{-1}^1 e^{-ix\xi} dx = \frac{2 \sin \xi}{\xi}$

Puis: $\mathcal{F}\mathcal{F}(\mathbb{1}_{]-1,1[}(x)) = 2 \mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
 $\parallel$
 $2\pi \mathbb{1}_{]-1,1[}(x)$

D'où: $\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \pi \mathbb{1}_{]-1,1[}$.

5. On a, puisque $x \mapsto e^{-a|x|} \in L^1(\mathbb{R})$ car $a > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} e^{-ix\xi} dx = \int_{-\infty}^0 e^{ax-ix\xi} dx + \int_0^{+\infty} e^{-ax-ix\xi} dx \\ &= \left[\frac{1}{a-i\xi} e^{(a-i\xi)x} \right]_{-\infty}^0 + \left[-\frac{1}{a+i\xi} e^{-(a+i\xi)x} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2} \end{aligned}$$

Donc: $\mathcal{F}(e^{-a|x|}) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$

6. De même: $\mathcal{F}(|x|e^{-a|x|})(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|e^{-a|x|} e^{-ix\xi} dx$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^0 -x e^{ax-ix\xi} dx + \int_0^{+\infty} x e^{-ax-ix\xi} dx \\ &= \left[-x \frac{1}{a-i\xi} e^{(a-i\xi)x} \right]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \frac{(a-i\xi)x}{a-i\xi} dx + \left[-\frac{x}{a+i\xi} e^{-(a+i\xi)x} \right]_0^{+\infty} \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+i\xi)x}}{a+i\xi} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \left[\frac{e^{(a-i\xi)x}}{(a-i\xi)^2} \right]_{-\infty}^0 + 0 + \left[-\frac{e^{-(a+i\xi)x}}{(a+i\xi)^2} \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{(a-i\xi)^2} + \frac{1}{(a+i\xi)^2} = \frac{(a+i\xi)^2 + (a-i\xi)^2}{(a^2+\xi^2)^2} = \frac{2(a^2-\xi^2)}{(a^2+\xi^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \underline{\underline{F(|x|e^{-a|x|}) = \frac{2(a^2-\xi^2)}{(a^2+\xi^2)^2}}}$$

7. Comme $\sin 0 = 0$, on a: $\sin |x| = \sin x \mathbb{1}_{x>0} - \sin x \mathbb{1}_{x<0}$

On: $\sin x \mathbb{1}_{x>0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sin x e^{-\varepsilon x} \mathbb{1}_{x>0}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. (*)

$$\begin{aligned}
\text{On: } \forall \varepsilon > 0, F(\sin x e^{-\varepsilon x} \mathbb{1}_{x>0})(\xi) &= \int_0^{+\infty} \sin x e^{-\varepsilon x - i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{x(i-\varepsilon-i\xi)} dx - \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-x(i+\varepsilon+i\xi)} dx \\
&= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{i(\xi-1)+\varepsilon} - \frac{1}{i(\xi+1)+\varepsilon} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi-1-i\varepsilon} - \frac{1}{\xi+1-i\varepsilon} \right)
\end{aligned}$$

On, on sait que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\frac{1}{y+a-i\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \text{vp}\left(\frac{1}{y+a}\right) + i\pi \delta_{-a}, a \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc: } F(\sin x e^{-\varepsilon x} \mathbb{1}_{x>0}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \left(\text{vp}\left(\frac{1}{\xi-1}\right) - \text{vp}\left(\frac{1}{\xi+1}\right) \right) + i\frac{\pi}{2}(\delta_1 - \delta_{-1})$$

$$\text{Et de même: } F(\sin x e^{\varepsilon x} \mathbb{1}_{x<0}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left(\text{vp}\left(\frac{1}{\xi-1}\right) - \text{vp}\left(\frac{1}{\xi+1}\right) \right) + i\frac{\pi}{2}(\delta_1 - \delta_{-1})$$

D'où, comme la convergence de (*) a lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a:

$$\underline{\underline{F(\sin |x|) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(F(\sin x e^{-\varepsilon x} \mathbb{1}_{x>0}) - F(\sin x e^{\varepsilon x} \mathbb{1}_{x<0}) \right) = \text{vp}\left(\frac{1}{\xi+1}\right) - \text{vp}\left(\frac{1}{\xi-1}\right)}}$$

Exercice 4

Par le théorème de Plancherel, comme $\frac{d^4 u}{dx^4} + k u \in L^2(\mathbb{R})$,

$((i\xi)^4 + k) \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$. Donc $\hat{u}$ est mesurable. Comme

$$k > 0, \quad (i\xi)^4 + k = k + \xi^4 > 0.$$

• si $|\xi| \leq 1$, alors $\forall j \in \{0, \dots, 4\}, |\xi|^j \leq 1 \leq C_1 k$ si $C_1 \geq \frac{1}{k}$

$$\text{Donc: } \exists C_1 > 0, \quad |\xi|^j \leq C_1 k \leq C_1 (k + \xi^4).$$

• si $|\xi| > 1$, alors pour $C_2 > 1$, $|\xi|^j \leq C_2 |\xi|^4 = C_2 \xi^4$

$$\text{D'où: } \exists C_2 > 0 \ (\geq 1), \quad |\xi|^j \leq C_2 (\xi^4 + k)$$

Si $C = \max(C_1, C_2)$, on vient de montrer que dans tous les cas:

$$\exists C > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\xi|^j \leq C (k + \xi^4) \Rightarrow |\xi|^j |\hat{u}| \leq C (k + \xi^4) |\hat{u}|$$

pour tout $j \in \{0, \dots, 4\}$. Par majoration, comme $(k + \xi^4) \hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$,

$\xi^j \hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout $j \in \{0, \dots, 4\}$.

Par Plancherel: $\frac{d^j u}{dx^j} \in L^2(\mathbb{R}), \forall j \in \{0, \dots, 4\}$.

Exercice 5

Tout d'abord, on remarque que comme u est à support compact, $\hat{u}$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^m$.

Appliquons $\mathcal{F}$ à l'équation $P(D)u=0$: $P(\xi)\hat{u}(\xi)=0, \forall \xi \in \mathbb{R}^m$.

Posons $Z = \{\xi \in \mathbb{R}^m, P(\xi)=0\}$. Alors: $\forall \xi \in \mathbb{R}^m \setminus Z, \hat{u}(\xi)=0$.

Mais, comme P est un polynôme, Z est un fermé d'intérieur vide car P est non identiquement nul. Donc $\mathbb{R}^m \setminus Z$ est dense dans $\mathbb{R}^m$. Comme $\hat{u}$ est continue et nulle sur l'ensemble dense $\mathbb{R}^m \setminus Z$, $\hat{u}$ est nulle partout.

Par transformée de Fourier inverse, on obtient alors que $u=0$.

Exercice 6:

Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, $u \in \text{Ker } P(D)$. Alors: $P(D)u = 0$.

Comme $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ et pas forcément, nous devons adapter l'argument de l'exercice 5.

Comme $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ et $P(D)u = 0$, par transformée de Fourier, $P(\xi)\hat{u} = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Donc $\hat{u}$ est nulle dans $\mathbb{R}^m \setminus \Sigma$.

Comme $\Sigma = \{0\}$, on en déduit que $\text{supp } \hat{u} \subset \Sigma = \{0\}$.

$$\text{D'où : } \hat{u} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \delta_0^{(\alpha)}$$

$$\text{Par transformée de Fourier inverse : } u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (ix)^\alpha.$$

u est donc bien un polynôme.

Exercice 7

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a:

$$\begin{aligned}\langle xT, \varphi \rangle &= \langle \text{vp}(\frac{1}{x}), x\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{x \varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Donc $xT=1$.

2. Par 1., on a: $\mathcal{F}(xT) = \mathcal{F}(1)$. Or, $\mathcal{F}(1) = 2\pi\delta_0$

et $\mathcal{F}(xT) = -\frac{1}{i} \frac{d}{d\xi} (\mathcal{F}(T))$. Donc:

$$\frac{d}{d\xi} \hat{T} = -2i\pi\delta_0 \text{ et } \frac{d}{d\xi} (\hat{T} + 2i\pi H) = 0.$$

(car $H' = \delta_0$).

Donc, il existe une constante C telle que:

$$\hat{T} + 2i\pi H = C \quad \text{i.e.} \quad \hat{T} = -2i\pi H + C.$$

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a:

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x} dx$$

Posez, pour $\varepsilon > 0$ fixé, $u = -x$. Alors:

$$\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(-x)}{x} dx = - \int_{|u| > \varepsilon} \frac{\varphi(u)}{-u} (-du) = - \int_{|u| > \varepsilon} \frac{\varphi(u)}{u} du$$

$$\begin{aligned}\text{D'où: } \langle \check{T}, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{|u| > \varepsilon} \frac{\varphi(u)}{u} du = - \langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle \\ &= \langle -T, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

D'où: $\check{T} = -T$. On dit que $\text{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution impaire.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\check{\varphi}}(\xi) &= \int_{-a}^a e^{-i\xi x} \varphi(-x) dx \\ &\stackrel{u=-x}{\rightarrow} = \int_a^{-a} e^{iu\xi} \varphi(u) (-du) \\ &= \int_{-a}^a e^{-iu(-\xi)} \varphi(u) du = \widehat{\varphi}(-\xi) = \check{\widehat{\varphi}}(\xi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \langle \hat{T}, \check{\varphi} \rangle &= \langle T, \widehat{\check{\varphi}} \rangle = \langle T, \check{\widehat{\varphi}} \rangle = \langle \check{T}, \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \langle -T, \widehat{\varphi} \rangle = \langle -\hat{T}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

4. On déduit de 3. que $\hat{T}$ est une distribution impaire.

$$\text{Donc: } \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad -2i\pi H(\xi) + C = -(-2i\pi H(-\xi) + C)$$

$$\text{D'où: } \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad 2i\pi \underbrace{(H(\xi) + H(-\xi))}_{=1} = C$$

$$\text{Donc } \underline{C = i\pi.}$$

$$\text{Finalement: } \boxed{\widehat{vp\left(\frac{1}{x}\right)} = -2i\pi H + i\pi.}$$

5. Par 4.: $2i\pi H = -\hat{T} + i\pi$

$$\text{D'où: } 2i\pi \hat{H} = -\hat{\hat{T}} + i\pi \hat{1} = -2\pi \check{T} + i\pi(2\pi\delta_0)$$

$$\stackrel{\text{car } \check{T} = -T}{\rightarrow} = 2\pi T + 2i\pi^2 \delta_0$$

$$\text{Donc: } \boxed{\hat{H} = \frac{1}{i} vp\left(\frac{1}{x}\right) + \pi \delta_0}$$

Exercice 8:

1. • Tout d'abord, on remarque que comme $\text{supp}(T \ast S)$ est inclus dans $\text{supp } T + \text{supp } S$, puisque T_1 est à support compact, on montre par récurrence que toutes les T_k sont aussi à support compact.

• On rappelle aussi que pour a et b dans $\mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \langle \delta_a \ast \delta_b, \varphi \rangle &= \langle \delta_a, \langle \delta_b, \varphi^\Delta \rangle \rangle \\ &= \langle \delta_a, \varphi(x+b) \rangle \\ &= \varphi(a+b) = \langle \delta_{a+b}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \delta_a \ast \delta_b = \delta_{a+b}.$$

• On peut alors calculer T_k . Soit $k \geq 2$:

$$T_k = \underbrace{T_1 \ast \dots \ast T_1}_{k \text{ fois}} = T_1^{\ast k} = \frac{1}{2^k} (\delta_1 + \delta_{-1})^{\ast k}$$

On $\ast$ est commutatif et associatif, on peut donc appliquer la formule du binôme de Newton pour obtenir:

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k C_k^j \delta_1^{\ast j} \ast \delta_{-1}^{\ast (k-j)} \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k C_k^j \delta_j \ast \delta_{j-k} \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k C_k^j \delta_{2j-k} \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \forall k \geq 2, \quad T_k = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k C_k^j \delta_{2j-k}.$$

2. Comme $T_k = T_1^{2k}$, on a: $\hat{T}_k(\xi) = (\hat{T}_1(\xi))^k$

$$\text{On: } \hat{T}_1(\xi) = \frac{1}{2}(\hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_{-1}) = \frac{1}{2}(e^{-i\xi} + e^{i\xi}) = \cos \xi$$

Donc $\boxed{\hat{T}_k(\xi) = (\cos \xi)^k}$ par l'exercice 2 et $\hat{T}_k$ est bien C^∞ (ce que l'on savait déjà car $T_k \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$)

3. D'après 2., on a: $\forall k \geq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}, f_k(\xi) = \left(\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)\right)^k$.

Alors, $f_k \in L^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, donc $f_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Pour montrer la convergence de f_k dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on fixe $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et on cherche la limite éventuelle de $\langle f_k, \varphi \rangle$.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a:

$$\forall k \geq 1, \langle f_k, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_k(\xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

On fixe $\xi \in \mathbb{R}$. Pour $k \geq 4|\xi|^2$, on a $\frac{|\xi|}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right) \geq 0$

$$\text{On: } \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right) = 1 - \frac{\xi^2}{2k} + o\left(\frac{\xi^2}{k}\right) \text{ et}$$

$$\log f_k(\xi) = k \log\left(\cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)\right) = k \log\left(1 - \frac{\xi^2}{2k} + o\left(\frac{\xi^2}{k}\right)\right) \\ = -\frac{\xi^2}{2} + o\left(\frac{\xi^2}{k}\right)$$

$$\text{D'où: } \lim_{k \rightarrow +\infty} \log f_k(\xi) = -\frac{\xi^2}{2} \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

On: $\forall \xi \in \mathbb{R}, |f_k(\xi) \varphi(\xi)| \leq |\varphi(\xi)| \in L^1(\mathbb{R})$ et est indépendant de k , donc par le théorème de convergence dominée,

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle f_k, \varphi \rangle &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(\xi) \varphi(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(\xi) \varphi(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \varphi(\xi) d\xi \\
&= \langle e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

D'où, $(f_k)_{k \geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

4. Soit $g_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $f_k = \mathcal{F}(g_k)$.

Alors, $\mathcal{F}(f_k) = (2\pi\sigma)(g_k)$ et $g_k = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}\sigma)(f_k)$, $\forall k \geq 1$.

Par continuité de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on déduit de la convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de $(f_k)_{k \geq 1}$, la convergence de $(g_k)_{k \geq 1}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

De plus, $(g_k)_{k \geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers $\frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}\sigma)(e^{-\frac{1}{2}\xi^2})$

$$\text{et } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}\sigma)(e^{-\frac{1}{2}\xi^2})(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(\frac{1}{2}x)^2}{4 \times \frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Donc, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$,

$$g_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Exercice 9:

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ et soit $t > 0$. On a, pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ telle que $\hat{T} \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$,

$$|\langle T, \varphi_t \rangle| = |\langle F^{-1} F T, \varphi_t \rangle| \\ = |\langle F T, \left(\frac{1}{(2\pi)^m} (F \circ \sigma) \right) \varphi_t \rangle|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^m} \hat{T}(\xi) \left(\frac{1}{(2\pi)^m} (F \circ \sigma) \varphi_t \right)(\xi) d\xi \right|$$

$$\leq \|\hat{T}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \times \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} |(F \circ \sigma) \varphi_t(\xi)| d\xi.$$

$$\text{On : } ((F \circ \sigma) \varphi_t)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) e^{ix\xi} dx = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) e^{ity\xi} t^m dy \\ \begin{matrix} \uparrow \\ y = \frac{x}{t} \quad dx = t^m dy \end{matrix} \\ = t^m \hat{\varphi}(-t\xi)$$

$$\text{D'où : } \int_{\mathbb{R}^m} |((F \circ \sigma) \varphi_t)(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^m} |t^m \hat{\varphi}(-t\xi)| d\xi \\ \begin{matrix} \eta = t\xi \\ \rightarrow \end{matrix} = \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{\varphi}(-\eta)| d\eta = \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}$$

D'où :

$$|\langle T, \varphi_t \rangle| \leq \|\hat{T}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \|\hat{\varphi}\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} \times \frac{1}{(2\pi)^m}.$$