Exercice 1 :

1. a. Comme φ est à support compact, il existe $a>0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$.

Alors, si $\chi(x)\chi(y)\varphi(x+y)\neq 0$, on a $x\geq -1$, $y\geq -1$ et $x+y\leq a$.

D'où : $x\in[-1,a+1]$ et $y\in[-1,a+1]$. Ainsi :

$$\operatorname{supp}(\varphi^\Delta)\subset[-1,a+1]^2 \quad \text{et } \varphi^\Delta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

b. Par a., la distribution $T*S$ est bien définie. Soit χ_1 une autre fonction vérifiant les mêmes hypothèses que χ. On a :

$$\langle T_x\otimes S_y, \varphi^\Delta(x,y)\rangle - \langle T_x\otimes S_y, \chi_1(x)\chi_1(y)\varphi(x+y)\rangle = \langle T_x\otimes S_y, (\chi(x)-\chi_1(x))\chi(y)\varphi(x+y)\rangle$$
$$+\langle T_x\otimes S_y, \chi_1(x)(\chi(y)-\chi_1(y))\varphi(x+y)\rangle$$

Or, $\operatorname{supp}(\chi-\chi_1)\subset]-\infty,-\frac{1}{2}]$ donc $(\operatorname{supp}T)\cap\operatorname{supp}(\chi-\chi_1)=\emptyset$, ce qui implique que le premier crochet est nul. Puis, comme $(\operatorname{supp}S)\cap\operatorname{supp}(\chi-\chi_1)=\emptyset$, le second crochet est lui aussi nul. Ainsi :

$$\langle T_x\otimes S_y, \varphi^\Delta\rangle = \langle T_x\otimes S_y, \underbrace{\varphi_1^\Delta}_{\text{correspondant à } \chi_1}\rangle$$ et $T*S$ ne dépend pas du choix de χ.

c. Soit $\delta\in]0,\frac{1}{2}[$ et soit $\chi_\delta\equiv 1$ sur $]-\delta,+\infty[$ et $\chi_\delta\equiv 0$ sur $]-\infty,-2\delta[$.

D'après b., on a :

$$\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}),\quad \langle T*S,\varphi\rangle = \langle T_x\otimes S_y, \varphi(x+y)\chi_\delta(x)\chi_\delta(y)\rangle.$$

On choisit φ à support dans $]-\infty,0[$. Alors, il existe $a>0$ tel que $\operatorname{supp}\varphi\subset]-\infty,-a[$. Ainsi, $(x,y)\mapsto\chi_\delta(x)\chi_\delta(y)\varphi(x+y)$ est non nulle uniquement si $x+y\leq -a$, $x\geq -2\delta$, $y\geq -2\delta$ soit encore $x\leq -a+2\delta$ et $y\leq -a+2\delta$.

Mais, pour δ assez petit, $-a+2\delta<0$ et comme $\operatorname{supp}T\subset[0,+\infty[$ et $\operatorname{supp}S\subset[0,+\infty[$, on obtient : $\langle T*S,\varphi\rangle=0$. Donc : $\operatorname{supp}(T*S)\subset[0,+\infty[$.

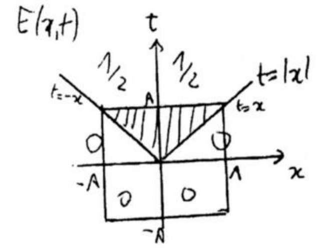
2\. a. Soit H la distribution de Heaviside, i.e. la fonction indicatrice de $]0,+\infty[$. Alors $H \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et

$$H * \delta_0' = H' * \delta_0 = \delta_0 * \delta_0 = \delta_0 .$$

Donc H est l'inverse de δ_0' dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

b. Supposons par l'absurde qu'il existe $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ telle que $T * S = \delta_0$. Comme $T \in C_0^\infty$, on devrait avoir que $T * S$ est la distribution associée à une fonction C^∞. Or δ_0 ne l'est pas. Contradiction et résultat : si $T \in C_0^\infty(]0,+\infty[)$, T n'est pas inversible dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

Exercice 2 :



1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, supp $\varphi \subset [-A,A]^2$, $A>0$. On a :

$$\langle (\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)E , \varphi \rangle = \langle E, (\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)\varphi \rangle$$

Par Fubini

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^A \int_x^A \partial_{tt}^2 \varphi(x,t)\, dt\, dx + \int_{-A}^0 \int_{-x}^A \partial_{tt}^2 \varphi(x,t)\, dt\, dx - \int_0^A \int_{-t}^t \partial_{xx}^2 \varphi(x,t)\, dx\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^A -\partial_t \varphi(x,x)\, dx + \int_{-A}^0 -\partial_t \varphi(x,-x)\, dx - \int_0^A \partial_x \varphi(t,t) - \partial_x \varphi(-t,t)\, dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \partial_t \varphi(u,u)\, du - \int_0^A \partial_x \varphi(u,u)\, du - \int_0^A \partial_t \varphi(-u,u)\, du + \int_0^A \partial_x \varphi(-u,u)\, du \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \phi_1'(u)\, du - \int_0^A \phi_2'(u)\, du \right] \text{ où } \phi_1(u) = \varphi(u,u) \text{ et } \phi_2(u) = \varphi(-u,u)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\phi_1(0) + \phi_2(0) \right] = \varphi(0,0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle .$$

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)E = \delta_0$.

2. Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact, $\{\text{supp} E, \text{supp} f\}$ est une paire convolutive et on a :

$$(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)(E * f) = (\partial_{tt}^2 E - \partial_{xx}^2 E) * f = \delta_0 * f = f.$$

Donc $u = E * f$ est solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de $\partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = f$.

3. Comme E est C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t,x) \in \mathbb{R}^2,\ t = |x|\}$, et que $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t = |x|\}$ est de mesure nulle, si $f \in C_0^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors $E * f$ est C^∞ sur Ω.

Donc $u \in C^\infty(\Omega)$.

Exercice 3 - Equation de la chaleur

1. On a, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leq E(x,t) \leq \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Donc $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soient $t>0$ et $x \in \mathbb{R}$:

On a : $$\partial_t\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\frac{x^2}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \left[-\frac{1}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi}\, t^{5/2}}\right] e^{-x^2/4t}$$

et $$\partial^2_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}\right) = \partial_x\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(-\frac{2x}{4t}\right) e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = -\partial_x\left(\frac{x}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$
$$= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-x^2/4t} - \frac{x}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}}\left(-\frac{x}{2t}\right) e^{-x^2/4t}$$
$$= \left[-\frac{1}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi}\, t^{5/2}}\right] e^{-x^2/4t}$$
$$= \partial_t\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$

3. a. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$.

On a : $$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} \partial_t \varphi(x,t)\, dt\, dx$$

IPP $\rightarrow$ $$= -\int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty} \partial_t\left(\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x,t)\, dt\, dx$$

par 2. $\rightarrow$ $$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty} \partial^2_{xx}\left(\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x,t)\, dt\, dx$$

2 × IPP + Fubini $\rightarrow$ $$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\, dt\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/4\varepsilon}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx - J_\varepsilon.$$

Donc : $$I_\varepsilon + J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/4\varepsilon}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx.$$

6. On pose $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, $dx = \sqrt{\varepsilon}\, dy$.

Alors : $I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4} \varphi(\sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon)\, dy$

Or, par convergence dominée, comme $e^{-y^2/4}\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} e^{-y^2/4}\varphi(0,0)$,

et $|e^{-y^2/4}\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)| \leq \|\varphi\|_\infty e^{-y^2/4} \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{\varphi(0,0)}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4}\, dy = \varphi(0,0).$$

4. On a, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned}
\langle (\partial_t - \partial_{xx}^2)E, \varphi\rangle &= -\langle E, \partial_t\varphi + \partial_{xx}^2\varphi\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(\partial_t\varphi(x,t) + \partial_{xx}^2\varphi(x,t)\right) dx\,dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}\times]0,+\infty[} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \left(\partial_t\varphi(x,t) + \partial_{xx}^2\varphi(x,t)\right) dx\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(I_\varepsilon + J_\varepsilon\right) = \varphi(0,0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

par convergence dominée. En effet :

$$\left|\frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t)\right| \leq \frac{\partial_t\varphi(x,t)}{\sqrt{4\pi t}} H(t) \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$$

et quand $\varepsilon \to 0$, $\mathbb{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(t) \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t) \longrightarrow \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t)$

et donc $I_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t)\, dx\,dt$.

De même : $J_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_{xx}^2\varphi(x,t)\, dx\,dt$.

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\boxed{(\partial_t - \partial_{xx}^2)E = \delta_0}$

Exercice 4 - Equation de Cauchy-Riemann.

1. On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $|f(x,y)| = \dfrac{1}{|x+iy|} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

car dans $\mathbb{R}^n$, $\dfrac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable en 0 si $\alpha < n$ (se voit en passant en coordonnées polaires).

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On a :

$$\langle \bar\partial f, \varphi \rangle = \frac{1}{2}\langle \partial_x f, \varphi\rangle + \frac{i}{2}\langle \partial_y f, \varphi\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}\langle f, \partial_x \varphi\rangle - \frac{i}{2}\langle f, \partial_y \varphi\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}\langle f, \partial_x\varphi + i\partial_y\varphi\rangle$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+iy}(\partial_x\varphi + i\partial_y\varphi)(x,y)\,dx\,dy.$$

$\times \frac{x-iy}{x-iy}$ dans $\int$ $\rightarrow$ $$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{x^2+y^2}(x\partial_x\varphi + y\partial_y\varphi)(x,y)\,dx\,dy - \frac{1}{2}i\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{x^2+y^2}(x\partial_y\varphi - y\partial_x\varphi)\,dx\,dy$$

en posant $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\end{cases}$ $\rightarrow$ $$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{r^2}\, r\partial_r\tilde\varphi(r,\theta)\times r\,dr\,d\theta - \frac{1}{2}i\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{r^2}\left(\partial_\theta\tilde\varphi(r,\theta)\right)r\,dr\,d\theta$$

et $\tilde\varphi(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$

car $\partial_r\tilde\varphi(r,\theta) = \partial_r\,\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\,\partial_x\varphi + \sin\theta\,\partial_y\varphi$
$= \frac{1}{r}(x\partial_x\varphi + y\partial_y\varphi)$

et $\partial_\theta\tilde\varphi(r,\theta) = \partial_\theta\,\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = -r\sin\theta\,\partial_x\varphi + r\cos\theta\,\partial_y\varphi$
$= x\partial_y\varphi - y\partial_x\varphi$

Soit $\varepsilon > 0$: $$\langle\bar\partial f, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{+\infty}\partial_r\tilde\varphi(r,\theta)\,dr\,d\theta - \frac{1}{2}i\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\partial_\theta\tilde\varphi(r,\theta)\,d\theta\,dr\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tilde\varphi(\varepsilon,\theta)\,d\theta - \frac{1}{2}i\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{r}\underbrace{\left(\tilde\varphi(r,2\pi) - \tilde\varphi(r,0)\right)}_{0}dr\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tilde\varphi(\varepsilon,\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(0,0)\,d\theta = \pi\varphi(0,0).$$

par convergence dominée car $|\tilde\varphi(\varepsilon,\theta)| \leq M$ est intégrable sur $[0,2\pi]$ et $\tilde\varphi(\varepsilon,\theta) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \varphi(0,0)$.

D'où $\langle\bar\partial f, \varphi\rangle = \pi\varphi(0,0) = \langle \pi\delta_0, \varphi\rangle$ i.e. $\bar\partial f = \pi\delta_0$.