TD 2 : Distributions - Suites et opérations

Exercice 1

Calculer les limites, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, des suites de distributions suivantes :

$$A_n = T_{x \mapsto \sin(nx)}, \quad B_n = T_{x \mapsto ng(nx)} \text{ où } g \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \delta_{\frac{p}{n}}, \quad D_n = e^{in \cdot \text{vp}} \left(\frac{1}{x} \right).$$

Exercice 2

Montrer que la suite de distributions $(T_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}),$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. L'ordre de la limite d'une suite de distributions d'ordre m est-il toujours m ?

Exercice 3

Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose :

$$F_N : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikt} \end{array} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

On note T_N la distribution associée à F_N .

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin \frac{t}{2}}.$$

2. Soit $M \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ dont le support est inclus dans $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Montrer que :

$$\langle T_N, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin \frac{t}{2}} \varphi(t) dt,$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \sum_{k=-M}^M \varphi(t + 2k\pi)$.

3. En écrivant $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$ où ψ est de classe C^∞ , montrer que la suite $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$.

Exercice 4

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Une série de distributions $\sum T_n$ est dite convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque la suite des sommes partielles l'est.

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(]0, +\infty[)$.

2. Montrer que si la série $\sum_{n \geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors la série numérique $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

3. On suppose désormais que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. On pose pour tout $N \geq 1$, $A_N = \sum_{n=1}^N a_n$ et $A_0 = 0$, de telle manière que $a_n = A_n - A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

a. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}$ alors la série numérique

$$\sum_{n \geq 1} A_n \left(\varphi \left(\frac{1}{n} \right) - \varphi \left(\frac{1}{n+1} \right) \right)$$

converge. b. En déduire que $\sum_{n \geq 1} a_n \delta_{\frac{1}{n}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 5

Soit H la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $H' = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $(\log|x|)' = \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Montrer que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right) = -\text{Pf} \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

Exercice 6

Soit $I =]a, b[$ et f et g deux fonctions de classe C^∞ sur I . On se propose de montrer que si $T \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $T' + fT = g$ au sens des distributions, alors T est donnée par une fonction C^∞ sur I qui vérifie cette équation différentielle au sens usuel.

1. Trouver une solution u_0 de $u' + fu = g$ qui soit de classe C^∞ sur I .

2. Conclure en mettant toute solution de $T' + fT = g$ sous la forme $T = u_0 + Se^{-F}$ où F est une primitive de f et S une distribution à déterminer.

Exercice 7

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer $(xT)'$.
2. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$xT' + T = 0.$$

Exercice 8

1. Résoudre, dans l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $2xu' - u = 0$.
2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de l'équation $2xT' - T = 0$. Soit T_1 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ et soit T_2 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.
 - a. Calculer T_1 et T_2 .
 - b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Vérifier que le support de S est inclus dans $\{0\}$.

c. Soit $R = \sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ où les a_k sont dans $\mathbb{C}$. Montrer que : $2xR' - R = 0 \iff R = 0$.

d. En déduire les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $2xT' - T = 0$.

3. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$2xT' - T = \delta_0.$$

Exercice 9

Soit h un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, h(x)) dx.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Quel est son ordre ?
2. Déterminer le support de T .
3. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que T soit la distribution associée à cette fonction.
4. Calculer $(\partial_x + h'(x)\partial_y)T$ au sens des distributions.