Distributions et applications **2019-2020**
Mines ParisTech

TD 3 : Distributions tempérées - Transformée de Fourier

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^x).$$

1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq |P(x)|$.

2. Montrer que, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

3. Montrer que S définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ < S, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$ associées aux fonctions suivantes:

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$ $(a \in \mathbb{R})$, 2. $\cos(x)$, 3. $x\sin(x)$, 4. $\frac{\sin(x)}{x}$

5. $\mathrm{e}^{-a|x|}$ $(a > 0)$, 6. $|x|\mathrm{e}^{-a|x|}$ $(a > 0)$, 7. $\sin(|x|)$.

Exercice 3

1. Déterminer toutes les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

2. Déterminer toutes les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $y' + y = \delta_0$ où $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ désigne la distribution de Dirac en 0.

3. Montrer qu'il existe une unique distribution tempérée $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, que l'on déterminera explicitement, solution de l'équation différentielle $y' + y = \delta_0$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une unique distribution tempérée $u_\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle

$$-\varepsilon u_\varepsilon'' + u_\varepsilon' + u_\varepsilon = \delta_0.$$

5. Montrer que $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers u_0 dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives.

Exercice 4

Soient $k > 0$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tels que

$$\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4} + ku \in L^2(\mathbb{R}).$$

Montrer que $\frac{\mathrm{d}^j u}{\mathrm{d}x^j} \in L^2(\mathbb{R})$ pour $0 \leq j \leq 4$.

Exercice 5

Soit $P(\xi)$ un polynôme dans $\mathbb{R}^n$ non identiquement nul. On note $P(D)$ l'opérateur différentiel à coefficients constants associé. Montrer que si $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ est telle que $P(D)u = 0$, alors $u = 0$.

Exercice 6

Soit $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^n$ à coefficients constants tel que :

$$\Sigma := \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n \ ;\ P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha = 0 \right\} = \{0\}.$$

Montrer que le noyau de $P(D)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est constitué de polynômes.

Exercice 7

On note $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$ la distribution *valeur principale* sur $\mathbb{R}$. On note aussi H la distribution de Heaviside, distribution associée à la fonction caractéristique de $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que $xT = 1$ au sens des distributions.

2. En appliquant la transformée de Fourier à l'égalité $xT = 1$, montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\widehat{T} = -2\mathrm{i}\pi H + C.$$

3. Soit $\check{T}$ la distribution définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < \check{T}, \varphi >=< T, \check{\varphi} >,$$

où : $\forall x \in \mathbb{R},\ \check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Justifier que $\check{T} = -T$ (on rappelle qu'ici $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$). En déduire que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $< \widehat{T}, \check{\varphi} >=< -\widehat{T}, \varphi >$.

4. Déduire de la question précédente la valeur de la constante C obtenue à la question 2.

5. En utilisant ce qui précède et le fait que $\check{T} = -T$, calculer $\widehat{H}$.

Exercice 8

On notera dans ce qui suit δ_a la distribution de Dirac au point a. On définit par récurrence la suite de distributions $(T_k)_{k\geq 1}$ par :

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1}) \ \text{ et } \ \forall k \geq 2,\ T_k = T_{k-1} \star T_1.$$

1. Écrire T_k comme combinaison linéaire finie de distributions à supports ponctuels.

2. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{T_k}$ de la distribution à support compact T_k.

3. Pour $k \geq 1$, on pose $f_k(\xi) = \widehat{T}_k\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}}\right)$. Montrer que $f_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et que la suite $(f_k)_{k\geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.

4. On note g_k la distribution dont f_k est la transformée de Fourier. Montrer que la suite $(g_k)_{k\geq 1}$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution que l'on déterminera.

Indication : On pourra utiliser le fait que, pour $a > 0$, $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{-ax^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.

Exercice 9

Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $t > 0$, on note φ_t la fonction définie par $\varphi_t(x) = \varphi(\frac{x}{t})$. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On suppose que $\widehat{T} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. En utilisant le fait que $T = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T$, montrer que,

$$\forall t > 0,\ | < T, \varphi_t > | \leq \tfrac{1}{(2\pi)^n} ||\widehat{T}||_{L^\infty}\ ||\widehat{\varphi}||_{L^1}.$$