Institut Galilée **2020-2021**
Master 1 de Mathmatiques
Analyse fonctionnelle

Examen d'Analyse Fonctionnelle - Option Fondamentale

Le 5 janvier 2021

Durée de l'épreuve : 1h30.

Seuls les documents de cours et de TD sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document.
Les calculatrices et moyens de communication sont interdits.
NB: Ne pas hésiter à admettre le résulat d'une question pour pouvoir traiter la suite d'un exercice.

Exercice 1. Soit $(H, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert complexe de dimension infinie. On note $||\cdot||$ la norme sur H associée au produit scalaire. Soit B la boule unité de $(H, ||\cdot||)$.

1. Montrer qu'il existe une suite infinie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B telle que,
$$\forall p, q \geq 0,\ p \neq q \ \Rightarrow\ ||x_p - x_q|| \geq \sqrt{2}.$$
On se propose de montrer dans la suite que la constante $\sqrt{2}$ est la plus grande possible.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de B et soit $\alpha > 0$ tels que
$$\forall p, q \geq 0,\ p \neq q \ \Rightarrow\ ||x_p - x_q|| \geq \alpha.$$
   (a) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contient une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers un élément x de H.
   (b) Montrer que pour tout $j, k \geq 0$,
   $$j < k \Rightarrow \alpha^2 \leq 2 - 2\mathrm{Re}((x_{n_j}|x_{n_k}))$$
   où Re désigne la partie réelle.
   (c) En déduire que $\alpha \leq \sqrt{2}$.

Exercice 2. On considère l'espace de Hilbert $L^2([0,1], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire
$$\forall f, g \in L^2([0,1], \mathbb{C}),\ (f|g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$
On désigne par T l'opérateur défini sur $L^2([0,1], \mathbb{C})$ par :
$$T\ :\ \begin{array}{ccc} L^2([0,1], \mathbb{C}) & \rightarrow & L^2([0,1], \mathbb{C}) \\ f & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} [0,1] & \rightarrow & [0,1] \\ x & \mapsto & xf(x) \end{array}\right) \end{array}$$
Rappel : un opérateur A sur un espace de Hilbert $(H, (\cdot|\cdot))$ est dit positif lorsqu'il est auto-adjoint et
$$\forall u \in H,\ (Au|u) \geq 0.$$
On admettra que si A est un opérateur positif, $\sigma(A) \subset [0, +\infty[$.

1. (a) Démontrer que T est un opérateur borné.
   (b) Calculer la norme de T, $|||T|||$.
2. (a) Montrer que T est auto-adjoint.
   (b) Montrer que T est un opérateur positif.
   (c) Démontrer que le spectre de T, $\sigma(T)$, est inclus dans $[0,1]$.
3. Démontrer que l'ensemble des valeurs propres de T, le spectre ponctuel $\sigma_p(T)$, est vide.
4. (a) Soit $\lambda \in [0,1]$. Démontrer que $T - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas surjectif.
   (b) En déduire que : $\sigma(T) = [0,1]$.
5. L'opérateur T est-il compact?