Institut Galilée **2020-2021**
Master 1 de Mathmatiques
Analyse fonctionnelle

Examen de rattrapage d'Analyse Fonctionnelle - Option Fondamentale

Le 18 mai 2021

Durée de l'épreuve : 1h30.

Seuls les documents de cours et de TD sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document.
Les calculatrices et moyens de communication sont interdits.
NB: Ne pas hésiter à admettre le résulat d'une question pour pouvoir traiter la suite d'un exercice.

Exercice 1. Soit $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert complexe. On note $||\cdot||$ la norme sur H associée au produit scalaire.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite normée de H qui converge faiblement vers $x \in H$. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} ||x_n - x||^2 = 1 - ||x||^2.$$
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite normée de H, *i.e.*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||x_n|| = 1$. Justifier que l'on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite faiblement convergente dans H.
3. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur borné sur H. Notons :
$$|||T||| := \sup_{||u||=1} ||Tu||.$$
Supposons qu'aucun vecteur normé $x \in H$ ne vérifie $|||T||| = ||Tx||$ (cela signifie que la norme de T n'est pas atteinte). Montrer qu'il existe une suite normée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faiblement convergente et telle que :
$$\lim_{n\to+\infty} ||Tx_n|| = |||T|||.$$

Exercice 2. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < +\infty\right\}$ que l'on munit du produit scalaire :
$$\forall x, y \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}),\ (x|y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \overline{y_n}$$
et de la norme associée $||\cdot||_2$ définie par : $\forall x \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}),\ ||x||_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. On admet que $(\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}), (\cdot|\cdot))$ est un espace de Hilbert.

Rappel : un opérateur A sur un espace de Hilbert $(H, (\cdot|\cdot))$ est dit positif lorsqu'il est auto-adjoint et : $\forall u \in H,\ (Au|u) \geq 0$. On admettra que si A est un opérateur positif, $\sigma(A) \subset [0, +\infty[$.

On considère l'application $T\ :\ \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ définie par :
$$\forall x \in \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}),\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (T(x))_n = x_{n+1} + x_{n-1} + 2x_n.$$

1. Démontrer que T est un opérateur borné et que $|||T||| \leq 4$.
2. Montrer que T est auto-adjoint.
3. Montrer que T est un opérateur positif.
4. Démontrer que le spectre de T, $\sigma(T)$, est inclus dans $[0, 4]$.
5. On admet l'inclusion réciproque $[0, 4] \subset \sigma(T)$. L'opérateur T est-il compact?