Université Sorbonne Paris Nord
Institut Galilée – M1 Mathématiques
Mai 2021

Examen d'Analyse Fonctionnelle – Tronc Commun

Durée de l'épreuve : 1 heure 30.

Seuls les documents de cours et de TD sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document.
Les calculatrices et moyens de communication sont interdits.

NB: Ne pas hésiter à admettre le résultat d'une question pour pouvoir traiter la suite d'un exercice.

Exercice 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose que pour tout $v \in X = L^1(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$.

1. Soit $\phi : X \to X$ définie par $\phi(v) = uv$. Montrer que le graphe de ϕ est fermé dans $X \times X$.
2. En déduire que $u \in L^\infty(\Omega)$. (Indication : on appliquera le théorème du graphe fermé, puis on raisonnera par l'absurde.)

Exercice 2. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $H = L^2(\Omega)$. Soit $A = \left\{f \in H;\ \int_\Omega f(x)dx \geq 1\right\}$.

1. Montrer que A est un convexe fermé de H.
2. Soit $g \in H$. Montrer que le minimum $\min_{f\in A} \|g - f\|_H$ est atteint en un unique élément $\bar{g} \in A$.
3. Calculer $\bar{g}$ pour $g = 0$ (on utilisera la caractérisation d'une projection).

Exercice 3. Une application g de $[0,1]$ dans $[0,1]$ est appelée *contraction stricte* s'il existe une constante $k \in [0,1[$ telle que $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$ pour tout $x, y \in [0,1]$.

1. Soit (f_n) une suite de contractions strictes de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe une sous-suite de (f_n) qui converge uniformément.
2. Soit f la limite de cette sous-suite. Montrer que f a au moins un point fixe.
3. Donner un exemple simple d'une limite uniforme de contractions strictes de $[0,1]$ dans $[0,1]$ qui n'est pas une contractions stricte.

Exercice 4. Soit (g_n) une suite de $C^1([0,1])$ et $M > 0$ une constante telles que $|g_n| \leq M$ et $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ p.p. $x \in [0,1]$.

1. Montrer que, pour tout $f \in C^1([0,1])$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, on a
$$\int_0^1 f(x)g_n'(x)dx = 0. \tag{1}$$
2. On suppose de plus que $|g_n'| \leq M$. Montrer que (1) reste vrai pour tout $f \in L^1([0,1])$ (on utilisera un argument de densité).

Exercice 5. Soit la suite de fonctions sur $[0,1]$ définie par $u_n(x) = \sin(nx)$.

1. Montrer que (u_n) n'est pas uniformément équicontinue sur $[0,1]$.
2. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^2([0,1])} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Montrer que (u_n) n'a aucune sous-suite qui converge dans $L^2([0,1])$. Raisonner par l'absurde et utiliser la question 2.