Institut Galilée — 2020-2021
Filière M1
Analyse fonctionnelle

Examen d'Analyse Fonctionnelle - Tronc Commun

janvier 2021

Durée de l'épreuve : 1 heure 30.

Seuls les documents de cours et de TD sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document.
Les calculatrices et moyens de communication sont interdits.

NB: Ne pas hésiter à admettre le résulat d'une question pour pouvoir traiter la suite d'un exercice.

Exercice 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

1. Soit $q \in]1, \infty[$, $M \in \mathbb{R}^+$ et $F = \{f \in L^1(\Omega) \cap L^q(\Omega);\ \|f\|_q \leq M\}$.

   a. Montrer que F est fermé dans $L^1(\Omega)$.

   b. Soit $r \in]1, q[$. Montrer que $L^1(\Omega) \cap L^q(\Omega) \subset L^r(\Omega)$.

2. Soit X un sous-espace vectoriel fermé de $L^1(\Omega)$ tel que $X \subset \bigcup_{1<q<\infty} L^q(\Omega)$.

   a. Montrer que
   $$X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n, \qquad \text{avec } F_n = \Big\{f \in X \cap L^{1+\frac{1}{n}}(\Omega);\ \|f\|_{1+\frac{1}{n}} \leq n\Big\}.$$

   b. A l'aide de la question 1.a, en déduire qu'il existe $p \in]1, \infty[$ tel que $X \subset L^p(\Omega)$.

   c. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_p \leq C\|f\|_1$ pour tout $f \in X$. Indication : on appliquera le théorème du graphe fermé.

Exercice 2. Soit $p \in]1, \infty[$.

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f, g \in L^p(\Omega)$.

   a. Montrer que $h(x) = \max(f(x), g(x)) \in L^p(\Omega)$.

   b. Soient (f_n) et (g_n) des suites de $L^p(\Omega)$ telles que $f_n \to f$ et $g_n \to g$ dans $L^p(\Omega)$, et soit $h_n = \max(f_n, g_n)$. Montrer que $h_n \to h$ dans $L^p(\Omega)$.

2. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Soit (f_n) une suite de $L^p(\mathbb{R}^d)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, et (g_n) une suite de $L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $g_n \to g$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f_n * g_n \to f * g$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$,

Exercice 3. Soient $f, g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ données par $f = \mathbf{1}_{]-1,0[}$ et $g = \mathbf{1}_{]0,1[}$

1. Soit $p \in [1, \infty[$. Calculer $\|f\|_p$, $\|g\|_p$, $\|f + g\|_p$ et $\|f - g\|_p$.

2. En déduire que si $p \neq 2$, alors $L^p(]-1, 1[)$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $K \in C([0, 1]^2)$. On pose $M = \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |K(x, y)|$.

1. Soit $u \in L^1([0, 1])$ une solution de l'équation
   $$u(x) = a + \int_0^1 K(x, y)u(y)\, dy, \quad p.p.\ x \in [0, 1]. \tag{1}$$

   a. Montrer que $u \in L^\infty([0, 1])$ et que $\|u\|_\infty \leq |a| + M\|u\|_1$.

   b. Dans cette question seulement on suppose $M < 1$. Montrer que $\|u\|_1 \leq |a|/(1 - M)$.

2. Soit (u_n) une suite de solutions de (1), telle que (u_n) est bornée dans $L^1([0, 1])$.

   a. Montrer que l'ensemble $E = \{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément équicontinu.

   b. En déduire que (u_n) possède une sous-suite qui converge uniformément sur $[0, 1]$. On note u sa limite.

   c. Montrer que u est solution de (1).