Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS
Année universitaire 2020-2021

Examen - MPI

Le 28 septembre 2020

Durée de l'épreuve : 3h.
Le sujet comporte deux pages.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits.

Exercice 1.

1. Montrer que l'intégrale généralisée
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
converge.

2. A l'aide d'un changement de variable, montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0.$$

3. Soit $a > 0$. Déduire de la question précédente que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi \ln(a)}{2a}.$$

Exercice 2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ où
$$\forall n \geq 1, f_n \ : \ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)} \end{array}.$$

1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$. On note f sa somme :
$$\forall x \in [0,+\infty[, \ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$
2. Soit $M > 0$ un réel. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, M]$.
3. La série $\sum f_n$ est-elle uniformément convergente sur $[0,+\infty[$?
4. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.
5. Montrer que f est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$.
6. Montrer que f est croissante sur $[0,+\infty[$.
7. Justifier que f admet une limite L en $+\infty$, $L \in [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$.
8. Soient $n \geq 1$ et $x_0 \geq n \geq 1$. Montrer que
$$f(x_0) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$
9. En déduire que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
10. Montrer que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Exercice 3. Dans toute la suite, I_3 désigne la matrice identité de taille 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que le polynôme caractéristique de A, noté χ_A, est égal à $-(X+1)(X-2)^2$.

2. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_{-1} = \text{Ker }(A+I_3)$, associé à la valeur propre -1.

3. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_2 = \text{Ker }(A-2I_3)^2$, associé à la valeur propre 2.

4. Soit la matrice
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

5. On pose $D = P\text{diag}(-1,2,2)P^{-1}$ où $\text{diag}(-1,2,2) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont -1, 2 et 2. On pose aussi $N = A - D$.

   Montrer que D est diagonalisable, que N est nilpotente et que N et D commutent.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

7. On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} & = & 2x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} & = & 3x_n + 3y_n - 4z_n \\ z_{n+1} & = & 3x_n + y_n - 2z_n \end{cases}$$
Donner les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de l'entier n.

8. On pose $\mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.
   (a) Justifier la convergence de la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer e^A.

Exercice 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π- périodique telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \; f(x) = |x|.$$

1. Déterminer la série de Fourier réelle de f.

2. Montrer que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

3. La série de Fourier de f converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?

4. Calculer la somme
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

5. Calculer la somme
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$