Université Sorbonne Paris Nord, Institut Galilée
Filière Ingénieur MACS
Année universitaire 2020-2021

Examen de rattrapage - MPI

Le 16 décembre 2020

Durée de l'épreuve : 2h15.
Le sujet comporte deux pages.
Les documents, calculatrices et moyens de communication sont interdits.

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère la fonction :

$$u_n \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{n^2+x^2} \end{array}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $A > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, A]$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. On définit alors la fonction $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$.
   (a) Montrer que la fonction u est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que la fonction u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2. 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t$ est convergente.

On définit alors la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\mathrm{d}t \end{array}.$$

2. En utilisant le théorème de continuité sous le signe intégral, montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
3. En utilisant le théorème de dérivabilité sous le signe intégral, montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.
4. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x)$. Vérifier les résultats précédents à l'aide de la formule obtenue.

Exercice 3. Dans toute la suite, I_3 désigne la matrice identité de taille 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -5 & -5 \\ 2 & 0 & 6 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que le polynôme caractéristique de A, noté χ_A, est égal à $(X+6)^2(X-4)$.
2. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_4 = \mathrm{Ker}\ (A - 4I_3)$, associé à la valeur propre 4.
3. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_{-6} = \mathrm{Ker}\ (A+6I_3)^2$, associé à la valeur propre -6.

4. Soit la matrice
$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

5. On pose $D = P\mathrm{diag}(4, -6, -6)P^{-1}$ où $\mathrm{diag}(4, -6, -6) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont 4, -6 et -6. On pose aussi $N = A - D$.

   Montrer que D est diagonalisable, que N est nilpotente et que N et D commutent.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

7. On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= -6x_n - 5y_n - 5z_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + 6z_n \\ z_{n+1} &= -2x_n + 4y_n - 2z_n \end{cases}$$
Donner les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de l'entier n.

Exercice 4. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π- périodique telle que
$$\forall x \in [-\pi, \pi],\ f(x) = x^2.$$

1. Déterminer la série de Fourier réelle de f.
2. Montrer que la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.
3. La série de Fourier de f converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?
4. Calculer la somme
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$
5. Calculer la somme
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$