

①

Exercice 1

1. Soit $f \in H$. On a:

$$\|Tf\|_2^2 = \int_0^1 |Tf(x)|^2 dx = \int_0^1 \left| \int_0^1 K(x,t) f(t) dt \right|^2 dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,t)|^2 dt \right) \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right) dx \\ &= \|K\|_{L^2([0,1] \times [0,1])}^2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

D'où : T est borné et $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|K\|_{L^2([0,1] \times [0,1])}$.

②

2. On a: $\forall f, g \in H, (Tf | g) = \int_0^1 Tf(x) \overline{g(x)} dx$

Fubini $\Rightarrow = \int_0^1 \int_0^1 K(x, t) f(t) dt \overline{g(x)} dx$

$\downarrow = \int_0^1 f(t) \int_0^1 K(x, t) \overline{g(x)} dx dt$

car $K(x, t) = K(t, x)$
 $= \overline{K(t, x)}$
 car K réel

$\downarrow = \int_0^1 f(t) \overline{\int_0^1 K(t, x) g(x) dx} dt = \int_0^1 f(t) \overline{Tg(t)} dt = (f | Tg).$

Donc T est auto-adjoint: $T^* = T.$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme K est C^0 sur $[0, 1] \times [0, 1]$ (cela se vérifie aisément, le seul point à vérifier étant la C^0 sur la diagonale $x=t$), qui est compact, K y est uniformément continue. Soit donc $\eta > 0$ tel que si pour $x, y \in [0, 1]$,

③

$$|x-y| < \eta \text{ also } \sup_{t \in [0,1]} |K(x,t) - K(y,t)| \leq \varepsilon.$$

On a also:

$$\forall x, y \in [0,1], |x-y| < \eta, \quad \forall f \in H,$$

$$|Tf(x) - Tf(y)| = \left| \int_0^1 K(x,t) f(t) dt - \int_0^1 K(y,t) f(t) dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 (K(x,t) - K(y,t)) f(t) dt \right|$$

$$\leq \left(\int_0^1 |K(x,t) - K(y,t)|^2 dt \right)^{1/2} \|f\|_2$$

$$\text{con } |x-y| < \eta \leq \left(\int_0^1 \sup_{t \in [0,1]} |K(x,t) - K(y,t)|^2 dt \right)^{1/2} \|f\|_2$$

$$\searrow \leq \left(\int_0^1 \varepsilon^2 dt \right)^{1/2} \|f\|_2 = \varepsilon \|f\|_2$$

④

Donc: $\forall x, y \in [0, 1], |x - y| < \eta \Rightarrow \forall f \in H, |Tf(x) - Tf(y)| \leq \varepsilon \|f\|_2$.

Tf est donc continue sur $[0, 1]$ pour toute $f \in H$, d'où le fait que $\text{Im} T \subset C^0([0, 1])$.

4. Puisque $\text{Im} T$ est incluse dans l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, pour démontrer la compacité de l'adhérence de l'image par T de la boule unité de H , on peut appliquer le théorème d'Ascoli.

Or, si $\|f\|_2 \leq 1$, on a montré à la question 3. :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in [0, 1], |x - y| < \eta \Rightarrow \forall f \in \overline{B}_H(0, 1), |Tf(x) - Tf(y)| \leq \varepsilon$.

D'où l'équicontinuité de $T(\overline{B}_H(0, 1))$.

⑤

De plus : $\forall x \in [0,1], |Tf(x)| \leq \|k\|_{L^2([0,1] \times [0,1])} \|f\|_2$
 $\forall f \in B_H(0,1),$ $\uparrow$ $\leq \|k\|_{L^2([0,1] \times [0,1])} \leq 1$

Donc pour tout $x \in [0,1], \{Tf(x)\}_{f \in B_H(0,1)}$ est borné. $\leq \|k\|_{L^2([0,1] \times [0,1])}$

On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli qui affirme que $\overline{T(B_H(0,1))}$ est compact. Donc T est un opérateur compact.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Soit $f \in H$, $Tf = \lambda f$. Alors :

$$\forall x \in [0,1], f(x) = \frac{1}{\lambda} Tf(x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 k(x,t) f(t) dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left[\int_0^x t(1-x) f(t) dt + \int_x^1 x(1-t) f(t) dt \right] \quad (1)$$

⑥

Or, Tf est C^0 sur $[0,1]$ donc $f = \frac{1}{\lambda} Tf$ l'est aussi.

Donc $x \mapsto (1-x) \int_0^x t f(t) dt + x \int_x^1 (1-t) f(t) dt$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et f l'est donc aussi. On a alors par dérivation :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1], f'(x) &= \frac{1}{\lambda} \left[- \int_0^x t f(t) dt + \cancel{(1-x)x f(x)} + \int_x^1 (1-t) f(t) dt \right. \\ &\quad \left. - \cancel{x(1-x) f(x)} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[- \int_0^x t f(t) dt + \int_x^1 (1-t) f(t) dt \right] \quad (2) \end{aligned}$$

De plus (1) impose que $f(0) = f(1) = 0$.

Comme f est C^0 et même C^1 sur $[0,1]$, on obtient par (2) que f' est C^1 sur $[0,1]$ et une nouvelle dérivation donne :

7

$$\forall x \in [0,1], \quad f''(x) = \frac{1}{\lambda} [-x f(x) - (1-x) f(x)] \\ = \frac{1}{\lambda} [-\cancel{x f(x)} - f(x) + \cancel{x f(x)}] = -\frac{1}{\lambda} f(x).$$

$$\text{D'où sur } [0,1], \begin{cases} f'' + \frac{1}{\lambda} f = 0. \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$$

6. On cherche les $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pour lesquels l'équation $Tf = \lambda f$ admet une solution non nulle dans H . D'après 5, il suffit de résoudre le problème de Dirichlet $\begin{cases} f'' + \frac{1}{\lambda} f = 0 \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases}$ et de chercher pour quelles valeurs de $\lambda \neq 0$ il admet des solutions non nulles.

8

Mais comme T est auto-adjoint on sait déjà que

$$\sigma_p(\overline{T}) \subset \sigma(T) \subset \mathbb{R}.$$

Donc on cherche des $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui conviennent.

1^{er} cas: $\lambda = -\frac{1}{a^2}$ $a > 0$. Alors :

$$\exists A, B \in \mathbb{C}, \forall x \in [0, 1], f(x) = A e^{ax} + B e^{-ax}$$

$$\text{Puis } f(0) = A + B = 0 \text{ et } f(1) = A e^a + B e^{-a} = 0$$

$$\text{soit } A = B = 0 \text{ et } f = 0 \text{ sur } [0, 1].$$

Donc dans ce cas λ n'est pas valeur propre de T .

2^e cas: $\lambda = \frac{1}{a^2}$, $a > 0$. Alors :

$$\exists C, D \in \mathbb{C}, \forall x \in [0, 1], f(x) = C \cos(ax) + D \sin(ax).$$

9 A nouveau : $f(0) = A = 0$ et $f(1) = A \cos a + B \sin a = 0$

D'où $B \sin \alpha = 0$. On peut supposer $B \neq 0$ ce qui impose

alors $\sin a = 0$ soit encore $a = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$ car $a > 0$.

$$D'_{\text{eff}} \quad \lambda = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{(n\pi)^2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Et pour chacune de ces valeurs, $f_n: x \mapsto \sin(n\pi x)$ est fonction propre associée. L'espace propre associé à chaque

$$d_n = \frac{1}{(n\pi)^2} \text{ est Vect}(f_n).$$

On a bien: $\sigma_p(T) = \left\{ \frac{1}{(n\pi)^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

10

7. Puisque T est un opérateur compact sur H de dimension infinie
le théorème de Riesz-Schauder nous assure que :

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{(n\pi)^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

8. (a) Comme T est auto-adjoint et borné :

$$\|T^2\|_{\mathcal{L}(H)} = \|TT^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}^2.$$

$$\text{En itérant : } \forall n \geq 1, \|T^{2^n}\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}^{2^n} \Rightarrow \forall n \geq 1, \|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T^{2^n}\|_{\mathcal{L}(H)}^{\frac{1}{2^n}}$$

Puis par la formule du rayon spectral :

$$\rho(T) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|T^p\|_{\mathcal{L}(H)}^{\frac{1}{p}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^{2^n}\|_{\mathcal{L}(H)}^{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$$

11

(b) On par définition:

$$\lambda(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \stackrel{\text{par 7.}}{=} \sup_{n \geq 1} \frac{1}{(n\pi)^2} \stackrel{\text{par 7.}}{=} \frac{1}{\pi^2}$$

pour $n=1$

$$\text{Donc } \|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \frac{1}{\pi^2}.$$

9. On a $P = P^*$ et $P^2 = P$. D'où:

$$\begin{aligned} \forall f \in H, (Pf | f) &= (P^2 f | f) = (P Pf | f) = (Pf | P^* f) \\ &= (Pf | Pf) = \|Pf\|_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Donc P est positif.

10. Par le théorème spectral des opérateurs compacts auto-adjoints appliqué à T :

12

$T = \sum_{n \geq 1} \lambda_n P_n$ où les λ_n sont les valeurs propres non nulles de T et P_n est la projection orthogonale sur $\text{Ker}(T - \lambda_n)$.

Ainsi : $\forall f \in H$,

$$(Tf | f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{C'est p.s.}}}{=} \sum_{n \geq 1} \lambda_n (P_n f | f) = \sum_{n \geq 1} \underbrace{\frac{1}{(n\pi)^2}}_{>0} \underbrace{\|P_n f\|^2}_{\geq 0} \geq 0$$

Donc T est positif.

11. D'après 6, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Pon le théorème de Mercer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = \int_0^1 k(t, t) dt$.

13

D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 \int_0^1 k(x, x) dx = \pi^2 \int_0^1 x(1-x) dx$$
$$= \pi^2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \pi^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

On retrouve le résultat bien connu.

14

Exercice 2:

1. Tout d'abord: $\forall n \geq 1$, $\|f_n\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \left| (2n)^{1/p} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$
 $= (2n)^{1/p} \times \left(\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dx \right)^{1/p} = (2n)^{1/p} \frac{1}{(2n)^{1/p}} = 1.$

Donc f_n est dans la boule unité de $L^p(\mathbb{R})$. Or $L^p(\mathbb{R})$ est un espace réflexif donc sa boule unité est séquentiellement faiblement compacte, d'où le résultat annoncé.

2. On a $(L^p(\mathbb{R}))' \simeq L^q(\mathbb{R})$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et

(15)

l'identification se fait via l'application

$$\Phi: L^q(\mathbb{R}) \rightarrow (L^p(\mathbb{R}))'$$

$$g \mapsto \left(\begin{array}{l} L^p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx \end{array} \right)$$

3. Soit $g \in L^q(\mathbb{R})$. Alors $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f g$ est une forme linéaire continue sur $L^p(\mathbb{R})$ donc par définition de la convergence faible et par $\underline{1}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) dx \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx$$

16

4. Si $\text{supp } g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et est compact, comme $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$, $\text{supp } g \cap [-\varepsilon, \varepsilon] = \emptyset$.

Alors : $\forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $g(x) = 0$ car $x \notin \text{supp } g$.

5. Soit $g \in C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ et soit ε donné en 4.

Alors pour k assez grand, $[-\frac{1}{n_k}, \frac{1}{n_k}] \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ et

$$\int_{\mathbb{R}} f_{n_k}(x) g(x) dx = (2n_k)^{1/p} \int_{-\frac{1}{n_k}}^{\frac{1}{n_k}} \underbrace{1 \times g(x)}_{=0 \text{ car } g \text{ nulle sur } [-\varepsilon, \varepsilon]} dx = 0$$

Donc la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} f_{n_k}(x) g(x) dx \right)_{k \geq 0}$ est nulle à partir d'un certain rang, sa limite $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_{n_k}(x) g(x) dx$ est donc nulle.

17

Pour le lemme de du Bois-Reymond, cela implique que $f=0$ pp sur $\mathbb{R}$.

6. $(f_n)_n$ cv donc faiblement vers la fonction nulle dans $L^p(\mathbb{R})$.

Si elle convergait fortement vers la fonction nulle on aurait : $\|f_n\|_p = \|f_n - 0\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On : $\forall n \geq 0, \|f_n\|_p = 1$ d'après 1.

Donc $(f_n)_{n \geq 0}$ ne cv pas fortement dans $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.