Devoir Maison

A rendre pour le 23/11/2021

Exercice 1

1. Soient f, g des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g , alors f est de classe C^1 et $f' = g$.
2. Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E . On suppose que tous les éléments de F sont de classe C^1 .
 - (a) Soit l'application $T : E \rightarrow F$ définie par $T(f) = f'$. En utilisant la question 1 et le théorème du graphe fermé, montrer que T est continue.
 - (b) Montrer que la boule unité fermée de F est compacte dans E (on utilisera (a) et le théorème d'Ascoli).
 - (c) Dédurre de ce qui précède que F est de dimension finie.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $K \in C([0, 1]^2)$. On pose $M = \sup_{(x,y) \in [0,1]^2} |K(x,y)|$.

1. Soit $u \in L^1([0, 1])$ une solution de l'équation

$$(1) \quad u(x) = a + \int_0^1 K(x,y)u(y) dy, \quad p.p. x \in [0, 1].$$

- (a) Montrer que $u \in L^\infty([0, 1])$ et que $\|u\|_\infty \leq |a| + M\|u\|_1$.
 - (b) Dans cette question seulement on suppose $M < 1$. Montrer que $\|u\|_1 \leq |a|/(1 - M)$.
2. Soit (u_n) une suite de solutions de (1), telle que (u_n) est bornée dans $L^1([0, 1])$.
 - (a) Montrer que l'ensemble $E = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément équicontinu.
 - (b) En déduire que (u_n) possède une sous-suite qui converge uniformément sur $[0, 1]$. On note u sa limite.
 - (c) Montrer que u est solution de (1).

Exercice 3

Soient $f, g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ données par $f = \mathbf{1}_{]-1, 0[}$ et $g = \mathbf{1}_{]0, 1[}$

1. Soit $p \in [1, \infty[$. Calculer $\|f\|_p$, $\|g\|_p$, $\|f + g\|_p$ et $\|f - g\|_p$.
2. En déduire que si $p \neq 2$, alors $L^p(]-1, 1[)$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 4

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $H = L^2(\Omega)$. Soit $A = \{f \in H; \int_{\Omega} f(x)dx \geq 1\}$.

1. Montrer que A est un convexe fermé de H .
2. Soit $g \in H$. Montrer que le minimum $\min_{f \in A} \|g - f\|_H$ est atteint en un unique élément $\bar{g} \in A$.
3. Calculer $\bar{g}$ pour $g = 0$ (on utilisera la caractérisation d'une projection).

Exercice 5

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose que pour tout $v \in X = L^1(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$.

1. Soit $\phi : X \rightarrow X$ définie par $\phi(v) = uv$. Montrer que le graphe de ϕ est fermé dans $X \times X$.
2. En déduire que $u \in L^\infty(\Omega)$. (Indication : on appliquera le théorème du graphe fermé, puis on raisonnera par l'absurde.)