Institut Galilée **2021-2022**
Filière M1
Analyse fonctionnelle - Option "Fondamentale"

Feuille de TD 1 : Opérateurs bornés

Exercice 1

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{L}(H)$, alors $T_n \rightharpoonup T$ si et seulement si $T_n^* \rightharpoonup T^*$.

Exercice 2

Soit H un espace de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que le graphe de T^*,

$$\Gamma(T^*) = \{(u, T^*u) \mid u \in H\} = (R(\Gamma(T)))^\perp$$

où $R : H \times H \to H \times H$ est définie par $R(u,v) = (-v, u)$.

Exercice 3

Soit $H = L^2(X,\mathbb{C})$ et soit $K \in L^2(X \times X, \mathbb{C})$. Soit T_K l'opérateur défini sur H par

$$\forall u \in H,\ \forall x \in X,\ T_K u(x) = \int_X K(x,y)u(y)dy.$$

1. Montrer que T_K est bien défini.
2. Montrer que $\|T_K\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|K\|_{L^2(X\times X,\mathbb{C})}$.
3. Calculer l'adjoint de T_K.

Exercice 4

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint, alors $r(T) = \|T\|$.

Exercice 5

Soit H un espace de Hilbert et soit U un opérateur unitaire sur H.
1. Montrer que $H = \mathrm{Ker}(U - I) \oplus \overline{\mathrm{Im}\ (U - I)}$.
2. Soit P le projecteur orthogonal d'image Ker $(U - I)$. Soit, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{I + U + \ldots + U^n}{n+1}.$$

Montrer que, pour tout $u \in H$, $S_n u \to Pu$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 6 - Trace d'un opérateur positif

Soient H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.
Soit T un opérateur positif sur H, *i.e.* T est borné, auto-adjoint et pour tout $u \in H$, $(Tu|u) \in \mathbb{R}_+$.
On admettra qu'il existe un unique opérateur positif S tel que $S^2 = T$. On le note $T^{\frac{1}{2}}$.
On pose

$$\mathrm{tr}\ T = \sum_{n=1}^{\infty} (Te_n|e_n) \in [0, +\infty].$$

Le réel tr T est appelé trace de l'opérateur T.
1. Montrer que la trace est indépendante du choix de la base hilbertienne de H.
2. Montrer que, pour tous opérateurs positifs T et S, tr $(T + S) =$ tr $T +$ tr S et que, pour tout $\lambda \geq 0$, tr $(\lambda T) = \lambda$ tr T.
3. Montrer que si T et S sont deux opérateurs positifs tels que $0 \leq T - S$, alors tr $S \leq$ tr T.
4. Montrer que, pour tout opérateur unitaire U, tr $(UTU^{-1}) =$ tr $(U^{-1}TU) =$ tr T.

Exercice 7

Soient $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach et T et T' dans $\mathcal{L}(E)$ qui commutent. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \max(\|T\|_{\mathcal{L}(E)}, \|T'\|_{\mathcal{L}(E)})$.
Démontrer la seconde identité de la résolvante,

$$R_z(T) - R_z(T') = (T' - T)R_z(T)R_z(T').$$

Exercice 8

Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Montrer que

$$\sigma(M_\varphi) = \mathrm{Im\ ess}\ \varphi$$

où M_φ est l'opérateur de multiplication par φ sur $L^2(\mathbb{R})$ et

$$\mathrm{Im\ ess}\ \varphi = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \forall\varepsilon > 0,\ \mathrm{Leb}(\varphi^{-1})(D(\lambda,\varepsilon)) > 0\}.$$

En déduire que si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $\sigma(M_\varphi) = \varphi([a,b])$.

Exercice 9

Soit E l'espace $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ des suites bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, muni de la norme:

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|.$$

Soit T l'opérateur sur E défini par :

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (Tu)_n = u_{n+1}.$$

1. Calculer la norme de T.
2. Montrer que tout nombre complexe de module 1 est valeur propre de T.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$. Soit $u \in E$. On note $(T-\lambda)u = f$. Pour tout entier $p \geq 1$, exprimer u_n en fonction de $f_{n-1}, \dots, f_{n-p}$ et de u_{n-p}. Que devient cette expression lorsque p tend vers $+\infty$? En déduire que λ n'appartient pas au spectre de T.
4. En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer le spectre de T.

On considère le sous-espace fermé F de E constitué des suites u telles que $u_n = 0$ pour tout $n > 0$. Alors, $T(F) \subset F$ et on désigne par T_F l'opérateur induit par T sur F.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$ et $\lambda \neq 0$. En utilisant l'expression de $(T-\lambda)^{-1}$ trouvée à la question 3, montrer que λ appartient au spectre de T_F.
6. En utilisant les résultats des questions 1 et 5, déterminer le spectre de T_F. Comparer avec le résultat obtenu à la question 4.

Exercice 10

On désigne par E l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs complexes, muni de la norme infinie $||\ ||_\infty$.
On note T_0 l'opérateur défini sur E par :

$$\forall u \in E,\ \forall x \in [0,1],\ T_0u(x) = xu(x).$$

Soit $f \in E$. On définit l'opérateur L par :

$$\forall u \in E,\ Lu = \int_0^1 f(x)u(x)dx.$$

Enfin si $g \in E$ on considère l'opérateur T défini par:

$$\forall u \in E,\ Tu = T_0u + (Lu)g.$$

1. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrez que si $g(\lambda) = 0$, alors $T - \lambda$ n'est pas surjectif. Dans le cas où $g(\lambda) \neq 0$, montrez que la fonction $h\ :\ x \mapsto \sqrt{|x-\lambda|}$ n'est pas dans l'image de $T - \lambda$.
En déduire que le spectre $\sigma(T)$ de T contient $[0,1]$.
2. Démontrez que $\sigma(T) \setminus [0,1]$ est constitué de valeurs propres dont les sous-espaces propres sont de dimension 1. Caractérisez ces valeurs propres comme l'ensemble des solutions d'une équation $F(\lambda) = 0$ où F est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ que l'on exprimera à l'aide de f et de g. En déduire que $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ est discret.
3. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 1$ et $g(x) = \alpha$, α étant un réel non nul. Déterminez $\sigma(T)$.