

Feuille de TD 2 : Opérateurs compacts

Exercice 1

Soit $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On considère l'opérateur $T : C([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{C})$ défini par : $\forall u \in C([a, b], \mathbb{C})$,

$$\forall x \in [a, b], Tu(x) = \int_a^x K(x, y)u(y)dy.$$

1. Montrer que T est compact.
2. Montrer que $\sigma(T) = \{0\}$.

Exercice 2

Vérifier que l'opérateur de multiplication T , défini sur $L^2([0, 2], \mathbb{C})$ par

$$\forall u \in L^2([0, 2], \mathbb{C}), \forall x \in [0, 2], (T(u))(x) = xu(x),$$

n'est pas compact, mais qu'il est borné et auto-adjoint.

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert. Soient $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls tendant vers 0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n un projecteur orthogonal de rang fini avec $P_m P_n = 0$ si $m \neq n$.

1. Montrer que $\sum \lambda_n P_n$ converge pour la norme d'opérateur vers un opérateur $T \in \mathcal{B}_\infty(H)$.
2. Si de plus les λ_n sont réels, montrer que T est auto-adjoint.

Exercice 4

Soient $(E, || ||)$ un espace de Banach, $x_0 \in E$ et f une forme linéaire sur E telle que $f(x_0) \neq 0$. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall x \in E, Tx = f(x)x_0.$$

1. Montrer que T est un projecteur si et seulement si $f(x_0) = 1$.
2. Déterminer $\sigma(T)$.
3. Expliciter la résolvante de T .

Exercice 5 - Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur T sur H est dit de Hilbert-Schmidt lorsqu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute famille orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H , on a

$$\forall N \geq 0, \sum_{n=0}^N \|Te_n\|^2 \leq M.$$

On note $\|T\|_{HS}$ le plus petit M vérifiant cette inégalité. Soit $\mathcal{B}_2(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

1. Montrer que $T \in \mathcal{B}_2(H)$ si et seulement si $\text{tr}(T^*T) < \infty$.
2. Soient $T \in \mathcal{B}_2(H)$, $\varepsilon > 0$ et $\{e_0, \dots, e_N\}$ une famille orthonormée de H tel que

$$\sum_{n=0}^N \|Te_n\|^2 \geq \|T\|_{HS}^2 - \varepsilon^2.$$

Si P_N désigne le projecteur orthogonal sur $V = \text{Vect}(e_0, \dots, e_N)$, montrer que $\|T - TP_N\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \varepsilon$.

3. En déduire que T est compact.
4. Si $H = L^2(X, \mathbb{C})$, soit $K \in L^2(X \times X, \mathbb{C})$. Montrer que l'opérateur T_K défini sur H par

$$\forall u \in H, \forall x \in X, T_K u(x) = \int_X K(x, y)u(y)dy$$

est de Hilbert-Schmidt.

Remarque : On peut montrer que réciproquement, si $T : H \rightarrow H$ est dans $\mathcal{B}_2(H)$, il existe $K \in L^2(X \times X, \mathbb{C})$ tel que $T = T_K$.

Exercice 6

Soit K une fonction continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$ à valeurs complexes. On désigne par T_K l'élément de $\mathcal{L}(L^2([0, 1], dx))$ défini par : $\forall f \in L^2([0, 1])$,

$$\forall x \in [0, 1], \mathbb{T}_K f(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$$

On suppose que l'opérateur T_K est autoadjoint et positif *i.e* $(T_K f | f) \geq 0$ pour tout $f \in L^2([0, 1])$.

1. Montrer que pour tout intervalle I contenu dans $[0, 1]$, on a

$$\int_I \int_I K(x, y) dx dy \in \mathbb{R}_+.$$

En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$, $K(x, x) \in \mathbb{R}_+$.

2. Soit (λ_n) la suite des valeurs propres non nulles de T_K répétées selon leur multiplicité et soit (φ_n) une base hilbertienne de l'orthogonal de $\ker(T_K)$ vérifiant pour tout n :

$$T_K \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$$

On a donc pour tout $f \in L^2([0, 1])$ l'identité

$$T_K f = \sum_n \lambda_n (f | \varphi_n) \varphi_n$$

la convergence de la série ayant lieu dans $L^2([0, 1])$.

a. Vérifier que chaque φ_n est continue.

b. En appliquant la question 1 à un noyau K_N convenable, montrer que pour tout N et tout $x \in [0, 1]$,

$$K(x, x) \geq \sum_{n \leq N} \lambda_n |\varphi_n(x)|^2$$

3. a. Montrer que la série de terme général λ_n converge.

b. Montrer que la série de terme général $\lambda_n (f | \varphi_n) \varphi_n$ converge uniformément pour $x \in [0, 1]$. Quelle est sa somme ?

c. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, la série de terme général $\lambda_n \overline{\varphi_n(x)} \varphi_n(y)$ converge uniformément en $y \in [0, 1]$. Quelle est sa somme ?

d. Exprimer la somme des λ_n en fonction de K .