

## Feuille de TD 3 : Dualité - Convergence faible

### Exercice 1

Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert.

1. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $H$  et soit  $x \in H$ . Montrer que  $x_n \rightarrow x$  si et seulement si

$$\forall y \in H, \langle x_n, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle x, y \rangle.$$

2. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille orthonormée de  $H$ . Montrer que  $x_n \rightarrow 0$ .

### Exercice 2

Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $H$  et soit  $x \in H$ .

On suppose que  $x_n \rightarrow x$  et  $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|x\|$ . Montrer que l'on a alors  $x_n \rightarrow x$ .

### Exercice 3

Soit  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace de Hilbert complexe. On note  $\|\cdot\|$  la norme sur  $H$  associée au produit scalaire.

1. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite normée de  $H$ , *i.e.*, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|x_n\| = 1$ . Justifier que l'on peut extraire de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite faiblement convergente dans  $H$ .

2. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite normée de  $H$  qui converge faiblement vers  $x \in H$ . Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|^2 = 1 - \|x\|^2.$$

3. Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur borné sur  $H$  tel qu'aucun vecteur normé  $x \in H$  ne vérifie  $\|T\|_{\mathcal{L}(H)} = \|Tx\|$  (cela signifie que la norme de  $T$  n'est pas atteinte).

a. Montrer qu'il existe une suite normée  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  faiblement convergente et telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Tx_n\| = \|T\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

b. Montrer que cette suite normée converge faiblement vers le vecteur nul de  $H$ .

### Exercice 4

On considère l'espace de Banach  $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ . On note  $E = C([0, 1])$ . Soit  $u \in E'$  définie par

$$\forall f \in E, u(f) = \int_0^1 f(x) dx$$

et pour tout  $n \geq 1$ , définissons  $u_n \in E'$  par

$$\forall f \in E, u_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Calculer  $\|u\|_{E'}$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $\|u_n\|_{E'}$ .
2. Montrer que

$$\forall f \in E, u_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u(f),$$

mais que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|u_n - u\|_{E'} = 2$ .

### Exercice 5

Soit  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs réelles que l'on munit de la norme infinie :  $\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ .

On rappelle le théorème de Riesz qui affirme que le dual topologique de  $E$  s'identifie à l'ensemble des mesures de Radon  $\mu$  sur  $[0, 1]$  (il s'agit des mesures sur la tribu borélienne de  $[0, 1]$  qui prennent des valeurs finies sur tout compact). Plus précisément, on pose :

$$\forall f \in E, \mu(f) = \int_0^1 f d\mu.$$

Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définies par :

$$\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

1. Montrer que pour toute mesure de Radon  $\mu$  sur  $[0, 1]$ ,  $(\mu(f_n))_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy.
2. Montrer que  $(f_n)_{n \geq 1}$  n'est pas faiblement convergente dans  $E$ .

*Indication :* on pourra considérer les formes linéaires continues de Dirac : pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

$$\delta_t : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto f(t) \end{array}.$$

On dit que  $E$  n'est pas *faiblement séquentiellement complet*.

### Exercice 6 - Hahn-Banach géométrique

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $C \subset E$  un sous-ensemble convexe d'intérieur non vide de  $E$ . Nous noterons  $\text{Int}(C)$  l'intérieur de  $C$ .

Le but de l'exercice est de montrer que :

si  $x \notin \text{Int}(C)$ , il existe une forme linéaire non nulle  $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$  et un réel  $\alpha$  tels que  $\ell(x) = \alpha$  et  $\ell(y) < \alpha$  pour tout  $y \in \text{Int}(C)$ .

Remarquons que la forme linéaire comme le réel  $\alpha$  dépendent de  $x$ .

On dit alors que l'hyperplan  $\ell(y) = \alpha$  *sépare le point  $x$  et le convexe  $C$* .

Pour tout convexe  $K$  dont 0 est un point intérieur (penser à  $K$  comme à un translaté de  $C$ ), on appelle *jauge du convexe  $K$*  l'application

$$J_K : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \inf\{a > 0 \mid \frac{x}{a} \in K\} \end{array}$$

1. Montrer que  $J_K$  est une fonctionnelle sous-linéaire sur  $E$ .
2. Montrer que, pour tout  $y \in E$ ,  $y \in \text{Int}(K)$  si et seulement si  $J_K(y) < 1$ .
3. Conclure par une application du théorème de Hahn-Banach.

### Exercice 7

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert. Nous allons montrer que l'espace  $L^1(\Omega)$  n'est pas réflexif. On admet ici que le dual topologique de  $L^1(\Omega)$  est  $L^\infty(\Omega)$  au sens où :

$$\forall u \in (L^1(\Omega))', \exists ! g \in L^\infty(\Omega), \forall f \in L^1(\Omega), u(f) = \int fg.$$

On suppose pour simplifier que  $0 \in \Omega$ . On définit, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$f_n = \frac{1}{\text{vol}(B(0, \frac{1}{n}))} \mathbb{1}_{B(0, \frac{1}{n})}.$$

1. Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\|f_n\|_{L^1} = 1$ .
2. Montrer que si  $L^1(\Omega)$  était réflexif, il existerait une suite extraite  $(f_{n_k})_{k \geq 0}$  de  $(f_n)$  et une fonction  $f \in L^1(\Omega)$  telles que, pour toute fonction  $g \in L^\infty(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} f_{n_k} g \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f g.$$

3. Montrer que si  $g \in C_c(\Omega \setminus \{0\})$ , alors il existe une boule ouverte centrée en 0 telle que  $g = 0$  sur cette boule.
4. En déduire que

$$\forall g \in C_c(\Omega \setminus \{0\}), \int_{\Omega} f g = 0.$$

5. Montrer que  $f = 0$  presque partout sur  $\Omega$ .
6. En déduire une contradiction avec la question 2 et conclure.

### Exercice 8 - Un théorème de Runge

Soit  $D$  un ouvert borné et simplement connexe dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $K$  un compact simplement connexe inclus dans  $D$  et soit  $R = \max |\xi|$ ,  $\xi \in K$ .

1. Soit  $z \in D$ ,  $|z| > R$ . Montrer que  $\xi \mapsto (z - \xi)^{-1}$  est limite uniforme de fonctions polynômiales en  $\xi$  sur  $K$ .
2. En déduire que pour tout  $z \in D \setminus K$ ,  $\xi \mapsto (z - \xi)^{-1}$  est limite uniforme de fonctions polynômiales en  $\xi$  sur  $K$ .
3. A l'aide de la formule intégrale de Cauchy, prouver que toute fonction analytique  $f$  sur  $D$ ,  $\xi \mapsto f(\xi)$ , est limite uniforme sur tout compact de  $D$  de fonctions polynômiales en  $\xi$ .