Institut Galilée **2021-2022**
Filière M1
Analyse fonctionnelle

Feuille de TD 1 : Théorème de Baire

Exercice 1

Trouver une suite $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts denses de $\mathbb{R}$ telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{O}_n$ ne soit pas ouvert.

Exercice 2

Montrer que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés d'un espace complet E dont la réunion est égale à E, alors l'ouvert $\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Int}(F_n)$ est dense dans E.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(na) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant le théorème de Baire aux fermés $F_p = \{a \geq 0\ ,\ \forall n \geq p,\ |f(na)| \leq \varepsilon\}$, montrer que f admet une limite nulle en $+\infty$.

Exercice 4

Soit f une fonction entière, c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$. Montrer que si en chaque point $z \in \mathbb{C}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(z) = 0$, alors f est un polynôme.
Indication : on pourra utiliser les fermés

$$F_n = \{z \in \mathbb{C},\ f^{(n)}(z) = 0\}.$$

Exercice 5

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts denses de $\mathbb{R}$.
1. Rappeler pourquoi $V = \cap_{n\in\mathbb{N}}V_n$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = V_n \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$ est un ouvert dense dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire que V ne peut être fini ou dénombrable.

Exercice 6

Soit $\tau \in \mathbb{R}_+^*$. Un réel x est diophantien d'exposant τ lorsqu'il existe une constante $c > 0$ telle, pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^\tau}.$$

On note $\mathcal{D}(\tau)$ l'ensemble des réels diophantiens d'exposant τ. Soit $\mathcal{D} = \cup_{\tau>0}\mathcal{D}(\tau)$. Un élément de $\mathcal{D}$ est dit diophantien. Enfin, un réel x est liouvillien s'il n'est ni rationnel ni diophantien. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des nombres liouvilliens.
1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\tau > 0$, posons

$$L_n(\tau) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq^\tau}\right\}.$$

Montrer que $L_n(\tau)$ est un ouvert dense de $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\mathcal{D}$ est contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. On dit que $\mathcal{D}$ est *maigre*.
3. Montrer que $\mathcal{L}$ contient une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{L}$ est *résiduel* de $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers une fonction f.
1. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_{m,n} = \{x \in E,\ |f_m(x) - f_l(x)| \leq \tfrac{1}{n},\ \forall l \in \mathbb{N},\ l \geq m\}.$$

Montrer que $A_{m,n}$ est un fermé de E.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que $E = \cup_{m\in\mathbb{N}}A_{m,n}$.
3. On pose $O_{m,n} = \mathrm{Int}(A_{m,n})$. Montrer que $O_n = \cup_{m\in\mathbb{N}}O_{m,n}$ est un ouvert dense de E.
4. Nous allons montrer que f est continue en tout point de $G = \cap_{n\in\mathbb{N}^*}O_n$. Soit $a \in G$ et soit $\varepsilon > 0$.
a. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $x \in O_{m,n}$, $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
b. Pour cet entier m, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $|f_m(x) - f_m(a)| \leq \varepsilon$.
c. Déduire des questions précedentes que f est continue au point a.
5. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est un résiduel de E.
6. La fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, $\mathbf{1}_\mathbb{Q}$, est-elle la limite simple sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues?