Institut Galilée **2021-2022**
Filière M1
Analyse fonctionnelle

Feuille de TD 2 : Théorèmes de Banach-Steinhaus et de l'application ouverte

Exercice 1

Soit E l'espace de Banach des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs réelles, muni de la norme $||\ ||_\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'opérateur $T_n : E \to \mathbb{R}$ par

$$\forall f \in E,\ T_n f = n \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Alors, $\frac{|T_n f|}{n}$ est l'erreur commise dans le calcul de l'intégrale de f lorsque l'on prend une somme de Riemann correspondant à une subdivision régulière de [0,1] en n intervalles égaux.

1. Minorer la norme de T_n pour tout n. *Indication : on pourra considérer la fonction* $f : x \mapsto \sin^2(n\pi x)$.

2. En déduire qu'il existe G, un G_δ dense dans E, tel que pour toute $f \in G$, $\frac{|T_n f|}{n}$ n'est pas un $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2

Soient $\ell^1(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $||u||_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < +\infty$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $||u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

1. Soit $A = \{u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mid u_n = 0$ sauf pour un nombre fini de $n\}$. Montrer que A est dense dans $(\ell^1(\mathbb{N}), ||\ ||_1)$ mais pas dans $(\ell^\infty(\mathbb{N}), ||\ ||_\infty)$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de suite de réels strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$(a_n u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) \iff (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N}).$$

Exercice 3

On note

$$\ell^2(\mathbb{N}^*) = \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 < +\infty \right\}$$

que l'on munit de la norme $||\cdot||_{\ell^2}$ définie par

$$\forall x \in \ell^2(\mathbb{N}^*),\ ||x||_{\ell^2} = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit

$$E = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}^*) \mid x_i = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } i\ \}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application linéaire $T_n : E \to \ell^2(\mathbb{N}^*)$ définie par :

$$\forall x \in E,\ \forall i \in \mathbb{N}^*,\ (T_n(x))_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq n \\ n x_n & \text{si} \quad i = n \end{cases}$$

Soient enfin $A = \{T_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et pour tout $x \in E$, $A_x = \{T_n(x) \mid T_n \in A\}$.

1. Montrer que pour chaque $x \in E$, A_x est bornée dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$.

2. Soit $\mathcal{L}(E, \ell^2(\mathbb{N}^*))$ l'espace des applications linéaires continues de E dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ munit de la norme $|||\cdot|||$ définie par :

$$\forall T \in \mathcal{L}(E, \ell^2(\mathbb{N}^*)),\ |||T||| = \sup_{x\in E,\ ||x||_{\ell^2}=1} ||T(x)||_{\ell^2}.$$

Montrer que A n'est pas bornée dans $\mathcal{L}(E, \ell^2(\mathbb{N}^*))$.

3. Expliquer pourquoi le théorème de Banach-Steinhaus ne s'applique pas ici.

Exercice 4

Soit $E = L^1(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions 2π-périodiques localement intégrables sur $\mathbb{R}$, muni de la norme :

$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

Soit $F = c_0(\mathbb{Z})$ l'espace des familles $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la norme $||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.

On se propose de montrer que l'application suivante n'est pas surjective :

$$T : \begin{array}{ccl} E & \to & F \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \end{array}$$

1. Rappeler pourquoi T est bien définie, linéaire, continue et injective.

2. Montrer que si T est surjective, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$,

$$||f||_{L^1} \leq \delta \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$$

3. Pour tout $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, 2π-périodique, on choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes de module 1 telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\bar{\alpha} c_n(g) = |c_n(f)|$. En appliquant la question 2 à

$$f_N = \sum_{|n|\leq N} \alpha_n e^{inx},$$

montrer que, si T est surjective, pour tout $N \geq 0$,

$$\sum_{|n|\leq N} |c_n(g)| \leq \delta ||g||_\infty$$

4. Conclure.

Exercice 5

On désigne par E l'espace de Banach des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs complexes, muni de la norme $||\ ||_\infty$. On se donne un réel α tel que $0 < \alpha < 1$ et on note E_α le sous-espace de E constitué des fonctions f telles qu'il existe une constante $A > 0$ pour laquelle :

$$\forall x \in [0,1],\ \forall y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq A|x-y|^\alpha$$

On munit E_α de la norme :

$$||f||_\alpha = ||f||_\infty + \sup_{0\leq x\neq y\leq 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

Alors $(E_\alpha, ||\ ||_\alpha)$ est un espace de Banach. Soit F un sous-espace fermé de $(E, ||\ ||_\infty)$. On suppose que F est contenu dans E_α et on se propose de montrer que F est de dimension finie.

1. Montrer que F est fermé dans $(E_\alpha, ||\ ||_\alpha)$.

2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout élément f de F, $||f||_\alpha \leq C||f||_\infty$.

3. Conclure en étudiant la boule unité de $(F, ||\ ||_\infty)$.