Institut Galilée **2021-2022**
Filière M1
Analyse fonctionnelle

Feuille de TD 4 : Espaces L^p

Exercice 1 Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 < p < +\infty$.

1. Montrer que l'on peut définir, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
2. Justifier que $F(x) =_{+\infty} \mathcal{O}(x^{(p-1)/p})$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $a > 0$ tel que
$$\left(\int_a^{+\infty} |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$
4. En déduire que $F(x) =_{+\infty} o(x^{(p-1)/p})$.

Exercice 2 Pour $1 \leq p < +\infty$, soit $\tau_a : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ définie, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$, par $\tau_a(f)(x) = f(x-a)$.
Démontrer que, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$,
$$\lim_{a \to 0} ||\tau_a(f) - f||_p = 0.$$
Indication : on pourra commencer par le cas où f est une fonction continue à support compact.

Exercice 3 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application
$$Tf : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^1 f(x-y)\mathrm{d}y \end{array}.$$

1. Montrer que, si f est continue à support compact, Tf est continue.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tf uniformément sur $\mathbb{R}$. En déduire que Tf est continue sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément unité.

Exercice 4 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie.

1. Montrer que pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$,
$$\lim_{p \to +\infty} ||f||_p = ||f||_\infty.$$
Indication : on pourra montrer que la limsup est inférieure à $||f||_\infty$ et que pour tout $\varepsilon > 0$, la liminf est supérieure à $||f||_\infty - \varepsilon$.
2. Soit
$$f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega).$$
On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $p \in [1, +\infty[$, $||f||_p \leq C$. Montrer que $f \in L^\infty(\Omega)$.
3. Trouver $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$ tel que $f \notin L^\infty(\Omega)$.

Exercice 5 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit F un sous-espace vectoriel de $L^\infty(X, \mu)$, fermé dans $L^p(X, \mu)$ pour un $p \in [1, +\infty[$. On se propose de montrer que F est de dimension finie.

1. (a) Montrer que F est fermé dans $L^\infty(X, \mu)$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour toute $f \in F$,
$$||f||_{L^\infty} \leq C||f||_{L^p}.$$
2. On suppose que $p \leq 2$. Montrer qu'il existe un réel $B_1 > 0$ tel que, pour toute $f \in F$,
$$||f||_{L^p} \leq B_1||f||_{L^2}.$$
3. On suppose que $p > 2$.
   (a) Montrer que, pour toute $f \in F$,
$$||f||_{L^p} \leq ||f||_{L^2}^{\frac{2}{p}} \, ||f||_{L^\infty}^{\frac{p-2}{p}}.$$
   (b) En déduire qu'il existe un réel $B_2 > 0$ tel que, pour toute $f \in F$,
$$||f||_{L^p} \leq B_2||f||_{L^2}.$$
4. Déduire des questions précédentes que, pour tout $p \in [1, +\infty[$, il existe un réel $B > 0$ tel que, pour toute $f \in F$,
$$||f||_{L^\infty} \leq B||f||_{L^2}.$$

5. On munit F du produit scalaire de $L^2(X,\mu)$. Soit $N \geq 1$ un entier et soit $(e_1,\dots,e_N)$ un système orthonormé dans F.

   (a) Montrer que, pour μ-presque tout $x \in X$, pour tous $c_1,\dots,c_N \in \mathbb{C}$,

   $$\left|\sum_{j=1}^{N} c_j e_j(x)\right| \leq \left\|\sum_{j=1}^{N} c_j e_j\right\|_\infty .$$

   Indication : on pourra utiliser la densité de $(\mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q})^N$ *dans* $\mathbb{C}^N$*.*

   (b) En déduire que, pour μ-presque tout $x \in X$, pour tous $c_1,\dots,c_N \in \mathbb{C}$,

   $$\left|\sum_{j=1}^{N} c_j e_j(x)\right| \leq B\left(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

   (c) Montrer que, pour μ-presque tout $x \in X$,

   $$\sum_{j=1}^{N} |e_j(x)|^2 \leq B^2.$$

   (d) En déduire que $N \leq B^2\mu(X)$.

6. Montrer que F est de dimension finie et que $\dim(F) \leq B^2\mu(X)$.