Institut Galilée **2021-2022**
Master 1 de Mathématiques
Analyse fonctionnelle

Examen d'Analyse Fonctionnelle - Option Fondamentale

Le 4 janvier 2022

Durée de l'épreuve : 1h30.

Seuls les documents de cours et de TD sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document.
Les calculatrices et moyens de communication sont interdits.

NB: Ne pas hésiter à admettre le résulat d'une question pour pouvoir traiter la suite d'un exercice.

Exercice 1. On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire

$$\forall f, g \in H,\ (f|g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

et de la norme associée notée $||\cdot||_2$. On désigne par T l'opérateur de H dans H défini par :

$$\forall f \in H,\ \forall x \in [0,1],\ (Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

où le noyau K est défini par :

$$K(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ t(1-x) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. **(1pt)** Démontrer que T est un opérateur borné.
2. **(1pt)** Démontrer que T est auto-adjoint.
3. **(1.5pts)** Montrer que l'image de T, $\mathrm{Im}(T)$, est incluse dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$.
4. **(2pts)** Démontrer que T est un opérateur compact.
5. **(3.5pts)** Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un complexe non nul. Montrer que l'équation en $f \in H$, $Tf = \lambda f$ est équivalente à
$$\begin{cases} f'' + \frac{1}{\lambda} f = 0 \\ f(0) = f(1) = 0. \end{cases}$$
6. **(3pts)** Montrer que l'ensemble des valeurs propres non nulles de T est :
$$\{(n\pi)^{-2}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$
7. **(1.5pts)** En déduire le spectre de T.
8. (a) **(2pts)** Montrer que la norme de T est égale à son rayon spectral.
   (b) **(1pt)** En déduire la norme de T.

   Rappel : un opérateur A sur un espace de Hilbert $(H, (\cdot|\cdot))$ est dit positif lorsqu'il est auto-adjoint et
$$\forall u \in H,\ (Au|u) \geq 0.$$
9. (a) **(1pt)** Soit P un projecteur orthogonal dans H. Montrer que P est positif.
   (b) **(1.5pts)** Montrer que T est un opérateur positif.

10. **(1pt)** On admettra le théorème de Mercer vu en travaux dirigés qui affirme que pour un opérateur à noyau positif (comme l'est T dans cet exercice), si $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite de ses valeurs propres non nulles, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n = \int_0^1 K(x,x)\mathrm{d}x.$$

En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2. Soit $p \in]1,+\infty[$. On considère l'espace $L^p(\mathbb{R})$ des fonctions à valeurs réelles de puissance p-ième intégrable sur $\mathbb{R}$ (pour la mesure de Lebesgue), munit de la norme :

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}),\ ||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On définit également, pour tout $n \geq 1$,

$$f_n = (2n)^{\frac{1}{p}} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$$

où $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$.

1. **(1.5pts)** Montrer qu'il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ de (f_n) et une fonction $f \in L^p(\mathbb{R})$ telles que $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ converge faiblement vers f.
2. **(1pt)** Rappelez, sans justification, à quel espace s'identifie le dual topologique de $L^p(\mathbb{R})$ et précisez l'application qui permet cette identification.
3. **(1pt)** Soit $q \in]1,+\infty[$ l'exposant conjugué de p, qui vérifie donc $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Montrer que, pour toute fonction $g \in L^q(\mathbb{R})$,
$$\int_{\mathbb{R}} f_{n_k}(x)g(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$
4. **(1pt)** Montrer que si g est continue sur $\mathbb{R}$ et à support compact inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, alors il existe un intervalle ouvert centré en 0 telle que $g=0$ sur cet intervalle.
5. **(1.5pts)** Notons $C_0(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à support compact inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Montrer que
$$\forall g \in C_0(\mathbb{R}\setminus\{0\}),\ \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) = 0.$$
On admettra que cela implique que f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$.
6. **(1pt)** La suite extraite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ converge-t-elle vers f dans $(L^p(\mathbb{R}), ||\cdot||_p)$?