

Devoir Maison : Une inégalité de
longes déviations

Correction.

①

1. La variable aléatoire $\exp(\lambda Z)$ est strictement positive et d'espérance finie. On peut donc lui appliquer l'inégalité de Markov :

$$\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R}, P(e^{\lambda Z} \geq e^{\lambda t}) \leq \frac{E(\exp(\lambda Z))}{e^{\lambda t}}$$

car $e^{\lambda t} > 0$.

De plus, par stricte croissance de $\ln$ et comme $\lambda > 0$:

$$P(e^{\lambda Z} \geq e^{\lambda t}) = P(Z \geq t). \text{ D'où le résultat}$$

② 2 (a) Pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, posons $\gamma_k = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}$.

Alors, on a égalité des événements:

$$(\gamma_k = 1) = (x_k = 1) \text{ et } (\gamma_k = 0) = (x_k = -1).$$

Comme $P(x_k = \pm 1) = \frac{1}{2}$, on en déduit que chaque variable aléatoire γ_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Par ailleurs, par le lemme des coalitions, $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ sont indépendantes par indépendance des x_k . Ainsi, la variable aléatoire

$$\hat{S}_m = \sum_{k=1}^m \gamma_k \text{ suit une loi binomiale } B(m, \frac{1}{2}).$$

$$\text{De plus : } (\hat{S}_m > \frac{m}{2}) = \left(\frac{1}{2} m S_m + \frac{m}{2} > \frac{m}{2} \right) = (m S_m > 0) = (S_m > 0)$$

③ De même $(\hat{S}_n < \frac{n}{2}) = (S_n < 0)$.

Pour montrer que $P(S_n > 0) = P(S_n < 0)$ il suffit donc de montrer que $P(\hat{S}_n > \frac{n}{2}) = P(\hat{S}_n < \frac{n}{2})$.

$$\text{On: } P(\hat{S}_n > \frac{n}{2}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{bi binomiale}}}{=} \sum_{\frac{n}{2} < k \leq n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n-k}} \frac{1}{2^k} = \sum_{\frac{n}{2} < k \leq n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

$$= \sum_{\frac{n}{2} < k \leq n} \binom{n}{n-k} \frac{1}{2^n}$$

$$\xrightarrow{k=n-l} = \sum_{0 \leq l < \frac{n}{2}} \binom{n}{l} \frac{1}{2^n}$$

$$= P(\hat{S}_n < \frac{n}{2}) \text{ . D'où l'égalité voulue.}$$

④ (b) Les événements $\{S_m > 0\}$, $\{S_m = 0\}$, $\{S_m < 0\}$ forment un système complet d'événements. D'où:

$$2(a) \quad P(S_m > 0) + P(S_m = 0) + P(S_m < 0) = 1$$

$$\downarrow \Rightarrow 2 P(S_m > 0) + P(S_m = 0) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(S_m > 0) = \frac{1}{2} (1 - P(S_m = 0)).$$

$$\text{D'où : } P(S_m \geq 0) = P(S_m > 0) + P(S_m = 0)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - P(S_m = 0)) + P(S_m = 0)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \underbrace{P(S_m = 0)}_{\geq 0} \geq \frac{1}{2}.$$

⑤ 3. (a) Appliquons la question 1. à la variable aléatoire
" $Z = m S_m$ " et on a réel λ

Alors

$$P(S_m \geq t) = P(m S_m \geq m t) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda m S_m})}{e^{\lambda m t}} \quad (*)$$

En effet, $e^{\lambda m S_m}$ est d'espérance finie car presque sûrement, $\lambda m S_m$ est discrète et prend ses valeurs dans $[-m\lambda, m\lambda]$.

Puis, par croissance de $\ln$, en appliquant cette fonction à (*):

$$\ln P(S_m \geq t) \leq \ln(\mathbb{E}(e^{\lambda m S_m})) - \lambda m t.$$

⑥ (b) On a:
$$\mathbb{E}(e^{n\lambda S_n}) = \mathbb{E}(e^{\lambda(x_1 + \dots + x_n)})$$
$$= \mathbb{E}(e^{\lambda x_1} \dots e^{\lambda x_n}).$$

On les variables aléatoires $x_1, \dots, x_n$ sont indépendantes donc par le lemme des coalitions les variables aléatoires $e^{\lambda x_1}, \dots, e^{\lambda x_n}$ le sont aussi et puisque si x et y sont deux variables indépendantes, $\mathbb{E}(xy) = \mathbb{E}(x)\mathbb{E}(y)$,

on a:
$$\mathbb{E}(e^{n\lambda S_n}) = \mathbb{E}(e^{\lambda x_1}) \dots \mathbb{E}(e^{\lambda x_n})$$

On les x_i sont toutes de même loi, donc

$$\mathbb{E}(e^{\lambda x_1}) = \dots = \mathbb{E}(e^{\lambda x_n}).$$

⑦

Il vient: $\mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) = (\mathbb{E}(e^{\lambda X_1}))^n$

Par 3(a): $\ln P(S_n \geq t) \leq n \ln (\mathbb{E}(e^{\lambda X_1})) - n\lambda t$

et en divisant par $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n} \ln P(S_n \geq t) \leq \ln (\mathbb{E}(e^{\lambda X_1})) - \lambda t.$$

(c) Or, par le théorème de transfert:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\lambda X_1}) &= P(X_1=1)e^{\lambda} + P(X_1=-1)e^{-\lambda} \\ &= \frac{1}{2}(e^{\lambda} + e^{-\lambda}) = \cosh \lambda. \end{aligned}$$

et $\ln(\mathbb{E}(e^{\lambda X_1})) = \psi(\lambda).$

D'où: $\forall n \geq 1, \forall \lambda > 0, \frac{1}{n} \ln P(S_n \geq t) \leq \psi(\lambda) - \lambda t \leq \inf_{\lambda > 0} \psi(\lambda) - \lambda t.$

⑧

Or, à t fixé, $\lambda \mapsto \psi(\lambda) - \lambda t$ est continue sur $\mathbb{R}$,

donc :
$$\inf_{\lambda > 0} \psi(\lambda) - \lambda t = \inf_{\lambda \geq 0} \psi(\lambda) - \lambda t.$$

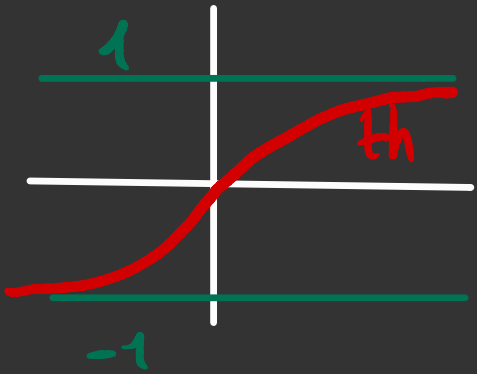
D'où :
$$\forall n \geq 1, \frac{1}{n} \ln P(S_n \geq t) \leq \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t).$$

4 (a) Par le théorème de transfert:

$$\begin{aligned} \forall \lambda \geq 0, m(\lambda) &= \frac{P(X_1=1) \times 1 \times e^\lambda + P(X_1=-1) \times (-1) e^{-\lambda}}{P(X_1=1) e^\lambda + P(X_1=-1) e^{-\lambda}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} e^\lambda - \frac{1}{2} e^{-\lambda}}{\frac{1}{2} e^\lambda + \frac{1}{2} e^{-\lambda}} = \frac{\operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda} = \operatorname{th}(\lambda) \end{aligned}$$

⑨

(b) La fonction th est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$ et plus précisément de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$. D'où: $\forall t \in [0, 1[, \exists ! \lambda \geq 0, \text{th}(\lambda) = t$.



En effet: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\text{th}(\lambda))' = 1 - (\text{th}(\lambda))^2 = \frac{1}{(\text{ch}(\lambda))^2} > 0$
et th est C^∞ d'où ce résultat par le théorème de la bijection C^∞ .

5. (a) Soient $m \geq 2$ et $\lambda \geq 0$. On a:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda)) D_m(\lambda)) &= \mathbb{E}((X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda)) e^{\lambda(X_1 + \dots + X_m) - m\psi(\lambda)}) \\ &= \mathbb{E}((X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda)) e^{(\lambda X_1 - \psi(\lambda)) + (\lambda X_2 - \psi(\lambda)) + \dots + (\lambda X_m - \psi(\lambda))}) \\ &= \mathbb{E}((X_1 - m(\lambda)) e^{\lambda X_1 - \psi(\lambda)} \times (X_2 - m(\lambda)) e^{\lambda X_2 - \psi(\lambda)} \times \prod_{k=3}^m e^{\lambda X_k - \psi(\lambda)}) \end{aligned}$$

10

Or, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, donc, par le lemme des coalitions, les variables $(X_1 - m(t))e^{\lambda X_1 - \psi(t)}$, $(X_2 - m(t))e^{\lambda X_2 - \psi(t)}$, $e^{\lambda X_3 - \psi(t)}$, $\dots$, $e^{\lambda X_n - \psi(t)}$ le sont aussi.

⚠ $X_1 - m(t)$, $X_2 - m(t)$ et $D_n(t)$ ne sont pas indépendantes car X_1 et X_2 apparaissent dans $D_n(t)$.

D'où, par indépendance :

$$\mathbb{E}((X_1 - m(t))(X_2 - m(t))D_n(t)) = \mathbb{E}((X_1 - m(t))e^{\lambda X_1 - \psi(t)}) \mathbb{E}((X_2 - m(t))e^{\lambda X_2 - \psi(t)}) \times \prod_{k=3}^n \mathbb{E}(e^{\lambda X_k - \psi(t)})$$

Enfin, les X_k sont toutes de même loi, donc :

$$\mathbb{E}((X_1 - m(t))e^{\lambda X_1 - \psi(t)}) = \mathbb{E}((X_2 - m(t))e^{\lambda X_2 - \psi(t)}) \text{ et } \forall k \geq 3, \mathbb{E}(e^{\lambda X_k - \psi(t)}) = \mathbb{E}(e^{\lambda X_1 - \psi(t)})$$

11

Il vient donc bien:

$$\mathbb{E}((X_1 - m(t))(X_2 - m(t))D_n(t)) = \left(\mathbb{E}((X_1 - m(t))e^{\lambda X_1 - \psi(t)}) \right)^2 \left(\mathbb{E}(e^{\lambda X_1 - \psi(t)}) \right)^{n-2}$$

(b) Il suffit pour cela de montrer que : $\mathbb{E}((X_1 - m(t))e^{\lambda X_1 - \psi(t)}) = 0$.

Or, par linéarité de l'espérance:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_1 - m(t))e^{\lambda X_1 - \psi(t)}) &= e^{-\psi(t)} [\mathbb{E}(X_1 e^{\lambda X_1}) - m(t) \mathbb{E}(e^{\lambda X_1})] \\ &= e^{-\psi(t)} \left[\mathbb{E}(X_1 e^{\lambda X_1}) - \frac{\mathbb{E}(X_1 e^{\lambda X_1})}{\mathbb{E}(e^{\lambda X_1})} \mathbb{E}(e^{\lambda X_1}) \right] \\ &= e^{-\psi(t)} (\mathbb{E}(X_1 e^{\lambda X_1}) - \mathbb{E}(X_1 e^{\lambda X_1})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

12

6 (a) Soient $n \geq 1$ et $\lambda \geq 0$.

Pour $n=1$, l'égalité demandée est immédiate car $S_1 = X_1$

Supposons donc $n \geq 2$. Alors:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left((S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda) \right) &= \frac{1}{n^2} \mathbb{E} \left(\left(\sum_{k=1}^n X_k - m(\lambda) \right)^2 D_n(\lambda) \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left((X_k - m(\lambda))^2 D_n(\lambda) \right) + \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E} \left((X_i - m(\lambda))(X_j - m(\lambda)) D_n(\lambda) \right) \end{aligned}$$

Comme toutes les variables $(X_i - m(\lambda))(X_j - m(\lambda)) D_n(\lambda)$ ont même loi que $(X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda)) D_n(\lambda)$, par 5 (b) on a:

$$\frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E} \left((X_i - m(\lambda))(X_j - m(\lambda)) D_n(\lambda) \right) = 0$$

D'où: $\mathbb{E} \left((S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda) \right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left((X_k - m(\lambda))^2 D_n(\lambda) \right) = \frac{1}{n} \mathbb{E} \left((X_1 - m(\lambda))^2 D_n(\lambda) \right)$

car les X_k ont toutes la même loi

13

(b) Tout d'abord, presque-sûrement, $X_1 \in \{-1, 1\}$. Par ailleurs, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\mathbb{M}(\lambda)| \leq 1$. Donc, presque-sûrement,

$$|X_1 - \mathbb{M}(\lambda)| \leq 2.$$

Cela implique que presque-sûrement, $(X_1 - \mathbb{M}(\lambda))^2 \leq 4$ d'où:
p.s : $(X_1 - \mathbb{M}(\lambda))^2 D_n(\lambda) \leq 4 D_n(\lambda)$ par positivité de $D_n(\lambda)$.

Par croissance de l'espérance et par linéarité:

$$\mathbb{E} \left((X_1 - \mathbb{M}(\lambda))^2 D_n(\lambda) \right) \leq 4 \mathbb{E}(D_n(\lambda)).$$

(c) Remarquons que $\psi(\lambda) = \ln \mathbb{E}(e^{\lambda X_1})$.

De plus par indépendance des X_k , par la formule des coalitions et par la propriété de morphisme de l'exponentielle:

$$\mathbb{E}(D_n(\lambda)) = e^{-n\psi(\lambda)} \mathbb{E} \left(e^{\lambda(X_1 + \dots + X_n)} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{les } X_k \text{ ont la même loi}}}{=} e^{-n \ln \mathbb{E}(e^{\lambda X_1})} (\mathbb{E}(e^{\lambda X_1}))^n$$

14

$$= (\mathbb{E}(e^{\lambda X_1}))^{-m} (\mathbb{E}(e^{\lambda X_1}))^m = 1.$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(D_m(b)) = 1.$$

(A) Pour 6(a):

$$\mathbb{E}((S_{n-m}(b))^2 D_m(b)) = \frac{1}{m} \mathbb{E}((X_{1-m}(b))^2 D_m(b))$$

$$\text{par 6(b)} \rightarrow \leq \frac{4}{m} \mathbb{E}(D_m(b))$$

$$= \frac{4}{m} \text{ car } \mathbb{E}(D_m(b)) = 1 \text{ par 6(c).}$$

7. (a) Cela se fait par disjonction de cas.

Cas n°1: Si $|S_{n-m}(b)| > \varepsilon$ alors $I_m(b, \varepsilon) = 0$

et l'inégalité demandée revient à $0 \leq 0$!

15

Cas n°2: Supposons $|S_n - m(h)| \leq \varepsilon$.

Alors $I_n(\lambda, \varepsilon) = 1$ et $\lambda n (S_n - m(h) - \varepsilon) \leq 0$

d'où $\exp(\lambda n (S_n - m(h) - \varepsilon)) \leq 1$ et l'inégalité voulue est encore vérifiée.

(b) Par croissance de l'espérance:

$$\mathbb{E} \left(I_n(\lambda, \varepsilon) \exp(\lambda n (S_n - m(h) - \varepsilon)) \right) \leq \mathbb{E}(I_n(\lambda, \varepsilon)) = \mathbb{P}(|S_n - m(h)| \leq \varepsilon).$$

§ (a) A nouveau, on considère deux cas.

Cas n°1: Si $|S_n - m(h)| \leq \varepsilon$ alors $I_n(\lambda, \varepsilon) = 1$ et

$$1 - I_n(\lambda, \varepsilon) = 0 \leq \frac{|S_n - m(h)|^2}{\varepsilon^2}.$$

16

Cas n°2: Si $|S_n - m(t)| > \varepsilon$ alors $I_n(t, \varepsilon) = 0$ et
par croissance de $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$, $|S_n - m(t)|^2 > \varepsilon^2$
soit encore $\frac{(S_n - m(t))^2}{\varepsilon^2} \geq 1 = 1 - I_n(t, \varepsilon)$.

Dans les deux cas, on a bien: $1 - I_n(t, \varepsilon) \leq \frac{(S_n - m(t))^2}{\varepsilon^2}$.

(b) Par positivité de $D_n(t)$, on déduit de (a):

$$D_n(t) - I_n(t, \varepsilon) D_n(t) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} (S_n - m(t))^2 D_n(t).$$

Par croissance de l'espérance et par sa linéarité:

$$\mathbb{E}(D_n(t)) - \mathbb{E}(I_n(t, \varepsilon) D_n(t)) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}((S_n - m(t))^2 D_n(t)) \leq \frac{4}{n\varepsilon^2}$$

11
1

$$\text{D'où: } \mathbb{E}(I_n(t, \varepsilon) D_n(t)) \geq 1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}.$$

↑
par 6(d)

(17)

9 (a) Tout d'abord, si $|S_n - m(t)| \leq \varepsilon$, en particulier $S_n \geq m(t) - \varepsilon$ et par inclusion des événements:

$$\mathbb{P}(S_n \geq m(t) - \varepsilon) \geq \mathbb{P}(|S_n - m(t)| \leq \varepsilon)$$

par 7(b) $\rightarrow \geq \mathbb{E}(I_n(t, \varepsilon) \exp(\lambda m(S_n - m(t) - \varepsilon)))$

$$= \mathbb{E}(I_n(t, \varepsilon) \exp(\lambda m S_n - m \psi(t) + m \psi(t) - \lambda m m(t) - \lambda m \varepsilon))$$

$$= \mathbb{E}(I_n(t, \varepsilon) \underbrace{\exp(\lambda m S_n - m \psi(t))}_{D_n(t)} \underbrace{\exp(m(\psi(t) - \lambda m(t) - \lambda \varepsilon))}_{\text{constante}})$$

par 8(b) $= \exp(m(\psi(t) - \lambda m(t) - \lambda \varepsilon)) \mathbb{E}(I_n(t, \varepsilon) D_n(t))$

$$\rightarrow \geq \left(1 - \frac{4}{n \varepsilon^2}\right) \exp(m(\psi(t) - \lambda m(t) - \lambda \varepsilon))$$

18

Pon croissance du logarithme et pon positivité de $\frac{1}{n}$,
on obtient:

$$\frac{1}{n} \ln \mathbb{P}(S_n \geq n\psi(1) - \varepsilon) \geq \frac{1}{n} \ln \left(1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}\right) + (\psi(1) - \lambda_m(1) - \lambda\varepsilon)$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors pour n assez grand, $\frac{4}{n\varepsilon^2} < 1$

(il suffit de prendre $n > \left\lceil \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rceil$ ou $\lceil \cdot \rceil$ est la partie entière)

et $u_n(\varepsilon)$ est bien définie. De plus : $\ln\left(1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 1 = 0$

donc $u_n(\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

19

10 (a). Soit $t \in [0, 1[$ et $\delta > 0$.

Soit $\tilde{\varepsilon}_1 > 0$ tel que : $\forall \varepsilon \in]0, \tilde{\varepsilon}_1[$, $t + \tilde{\varepsilon}_1 < 1$.

De plus, par continuité de m^{-1} , ce qui s'obtient du théorème de la bijection continue appliqué à m ,

$\varepsilon m^{-1}(t + \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Donc, quitte à se restreindre

à $]0, \tilde{\varepsilon}_1[$, $\exists \varepsilon_1 \in]0, \tilde{\varepsilon}_1[$ tel que $\varepsilon_1 m^{-1}(t + \varepsilon_1) < \delta/3$.

(b) Soit $\lambda_1 = m^{-1}(t + \varepsilon_1) \Leftrightarrow t = m(\lambda_1) - \varepsilon_1$.

Alors,

$$\frac{1}{n} \ln(P(S_n \geq t)) = \frac{1}{n} \ln(P(S_n \geq m(\lambda_1) - \varepsilon_1))$$

20

Et par 9(a):

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln(P(S_n \geq t)) &\geq u_n(\varepsilon_1) + \psi(\lambda_1) - \lambda_1(m(\lambda_1) - \varepsilon_1) \\ &= u_n(\varepsilon_1) + \psi(\lambda_1) - \lambda_1 t - 2\varepsilon_1 \lambda_1 \\ &\geq u_n(\varepsilon_1) + \psi(\lambda_1) - \lambda_1 t - \frac{2\delta}{3} \\ &\geq u_n(\varepsilon_1) + \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) - \frac{2\delta}{3}. \end{aligned}$$

con par 10(a)
 $\varepsilon_1 \lambda_1 \leq \frac{\delta}{3}$

d'où l'inégalité voulue.

Le $N_1 \in \mathbb{N}$ est celui pour lequel $u_n(\varepsilon_1)$ est bien défini pour $n \geq N_1 = \left\lceil \frac{4}{\varepsilon_1^2} \right\rceil$

(c) La suite $(u_n(\varepsilon_1))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 par 9(b) donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_2, -\frac{\delta}{3} \leq u_n(\varepsilon_1) \leq \frac{\delta}{3}$

(21)

Alors pour $N = \max(N_1, N_2) \geq N_1$, on a par 10(b):

$$\frac{1}{n} \ln P(S_n \geq t) \geq \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) - \frac{2}{3}\delta - \frac{\delta}{3}$$

$$= \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) - \delta.$$

(d) On vient d'obtenir, par 10(c) et 3(c):

$$\forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) - \delta \leq \frac{1}{n} \ln P(S_n \geq t) \leq \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $3(c)$ $3(c)$

Par définition:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P(S_n \geq t) = \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t)$$

(22)

11. Bien entendu, pour $t=1$ on ne peut plus raisonner comme précédemment, à partir de la question 10 (a).

Mais: $\forall m \geq 1, \mathbb{P}(S_m \geq 1) = \mathbb{P}(X_1 = \dots = X_m = 1)$

par indépendance des $X_k \rightarrow = \mathbb{P}(X_1 = 1) \dots \mathbb{P}(X_m = 1) = \frac{1}{2^m}$.

D'où: $\frac{1}{m} \ln \mathbb{P}(S_m \geq 1) = \ln \frac{1}{2}$ pour tout $m \geq 1$

et $\frac{1}{m} \ln \mathbb{P}(S_m \geq 1) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} -\ln 2$.

On; $\forall \lambda \geq 0, (\psi(\lambda) - \lambda)' = (\ln(\cosh(b)))' - 1 = \frac{\sinh(b)}{\cosh(b)} - 1 = \tanh(b) - 1$

Donc $\lambda \mapsto \psi(\lambda) - \lambda$ est décroissante et ≤ 0

$\inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\psi(\lambda) - \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{2} + \lambda - \lambda = -\ln 2$

(23)

Donc le résultat est toujours valable pour $t=1$,
mais avec une démonstration directe (et élémentaire)
dans ce cas.