Devoir Maison : Un principe de grandes déviations

A rendre pour le mardi 21 septembre 2021.

Dans tout ce problème, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On notera $\mathbb{P}[A]$ la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$ et $\mathbb{E}[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes mutuellement indépendantes telles que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}[X_k = 1] = \mathbb{P}[X_k = -1] = \frac{1}{2}.$$

On définit

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

ainsi que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\psi(\lambda) = \ln \left(\frac{1}{2} e^\lambda + \frac{1}{2} e^{-\lambda} \right)$$

où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1. Soit Z une variable aléatoire discrète telle que $\exp(\lambda Z)$ est d'espérance finie pour tout $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}[Z \geq t] \leq e^{-\lambda t} \mathbb{E}[\exp(\lambda Z)].$$

2. (a) Justifier que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}[S_n > 0] = \mathbb{P}[S_n < 0]$.
 (b) En déduire que $\mathbb{P}[S_n \geq 0] \geq \frac{1}{2}$.
3. (a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda > 0$, $\ln \mathbb{P}[S_n \geq t] \leq \ln(\mathbb{E}[e^{n\lambda S_n}]) - n\lambda t$.
 (b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda > 0$,

$$\frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq t] \leq \ln(\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}]) - \lambda t.$$

- (c) En déduire que

$$\frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq t] \leq \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t).$$

Dans toute la suite, on pose pour tout $\lambda \geq 0$,

$$m(\lambda) = \frac{\mathbb{E}(X_1 \exp(\lambda X_1))}{\mathbb{E}(\exp(\lambda X_1))} \quad \text{et} \quad D_n(\lambda) = \exp(\lambda n S_n - n\psi(\lambda)).$$

4. (a) Montrer que, pour tout $\lambda \geq 0$, $m(\lambda) = \text{th}(\lambda)$, où th désigne la fonction tangente hyperbolique.
 (b) En déduire que m est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour tout $t \in [0, 1[$, il existe un unique $\lambda \geq 0$ tel que $m(\lambda) = t$.
5. (a) Justifier que, pour tout $n \geq 2$ et tout $\lambda \geq 0$,

$$\mathbb{E}[(X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda))D_n(\lambda)] = (\mathbb{E}[(X_1 - m(\lambda))e^{\lambda X_1 - \psi(\lambda)}])^2 (\mathbb{E}[e^{\lambda X_1 - \psi(\lambda)}])^{n-2}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \geq 2$ et tout $\lambda \geq 0$,

$$\mathbb{E}[(X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda))D_n(\lambda)] = 0.$$

6. On fixe $n \geq 1$ et $\lambda \geq 0$.

(a) Montrer que,

$$\mathbb{E}[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] = \frac{1}{n} \mathbb{E}[(X_1 - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)].$$

(b) Montrer que,

$$\mathbb{E}[(X_1 - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] \leq 4\mathbb{E}[D_n(\lambda)].$$

(c) Montrer que $\mathbb{E}[D_n(\lambda)] = 1$.

(d) En déduire que

$$\mathbb{E}[(S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)] \leq \frac{4}{n}.$$

Soient $n \geq 1$, $\lambda \geq 0$ et $\varepsilon > 0$.

On note $I_n(\lambda, \varepsilon)$ la variable aléatoire définie par

$$I_n(\lambda, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

7. (a) Montrer que $I_n(\lambda, \varepsilon) \exp(\lambda n(S_n - m(\lambda) - \varepsilon)) \leq I_n(\lambda, \varepsilon)$.

(b) En déduire que

$$\mathbb{P}[|S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon] \geq \mathbb{E}[I_n(\lambda, \varepsilon) \exp(\lambda n(S_n - m(\lambda) - \varepsilon))].$$

8. (a) Montrer que

$$1 - I_n(\lambda, \varepsilon) \leq \frac{(S_n - m(\lambda))^2}{\varepsilon^2}.$$

(b) En déduire que

$$\mathbb{E}[I_n(\lambda, \varepsilon) D_n(\lambda)] \geq 1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}.$$

9. (a) Déduire des questions précédentes que

$$\frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}[S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon]) \geq \frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}\right) + (\psi(\lambda) - \lambda m(\lambda) - \lambda\varepsilon).$$

(b) On pose, pour tout $n \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$, $u_n(\varepsilon) = \frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}\right)$. Justifier que, à $\varepsilon > 0$ fixé, la suite $(u_n(\varepsilon))_{n \geq 1}$ converge vers 0.

10. Soit $t \in [0, 1[$. On fixe $\delta > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que $t + \varepsilon_1 < 1$ et $\varepsilon_1 m^{-1}(t + \varepsilon_1) < \frac{\delta}{3}$.

(b) Notons $\lambda_1 = m^{-1}(t + \varepsilon_1)$. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$,

$$\frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq t] \geq \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) - \frac{2}{3}\delta + u_n(\varepsilon_1).$$

(c) En déduire qu'il existe $N \geq N_1$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq t] \geq \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) - \delta.$$

(d) En déduire que

$$\frac{1}{n} \ln \mathbb{P}[S_n \geq t] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t).$$

11. La formule précédente est-elle encore valable pour $t = 1$?