

Feuille de TD 1 : Analyse réelle, séries, intégration

Analyse réelle

Exercice 1

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels décroissante et minorée. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans \mathbb{R} .
2. Soient $a < b$ deux réels. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Montrer que f possède une limite à droite en a .

Exercice 2

Soit f une application continue de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell < \infty$.

1. Illustrer cette situation par un graphique.
2. Montrer que f est bornée.

Exercice 3

Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, nulle hors d'un intervalle compact $[a, b]$ de \mathbb{R} . Montrer qu'il existe $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + x^2\psi(x)$$

et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi''(x)|.$$

Intégration

Exercice 4

Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ est convergente.

Exercice 5

Montrer que $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ est absolument convergente. En déduire que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

Séries, suites et séries de fonctions

Exercice 6

Soit f est une fonction continue qui, pour $x > N$, est positive en décroissant vers 0.

1. Montrer les inégalités

$$\sum_{p=N+1}^{N+n} f(p) \leq \int_N^{N+n} f(x) dx \leq \sum_{p=N}^{N+n-1} f(p).$$

2. En déduire que $\sum f(p)$ et $\int_N^\infty f(x) dx$ sont alors de même nature.

Exercice 7

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose

$$f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}.$$

1. Démontrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction que l'on précisera.
2. Montrer que cette convergence est uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 8

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall n \geq 0, \forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}.$$

1. Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),$$

est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Exercice 9

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

2. Montrer que la fonction f est impaire.
3. Montrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .
4. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ et calculer cette limite. En déduire la limite de f en $-\infty$.

Indication : on rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5. (a) Soit $a > 0$. Montrer que f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$.
- (b) En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

6. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) \geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

- (b) Justifier que la fonction f' admet une limite à droite en 0, cette limite appartenant à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
- (c) Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty.$$

- (d) En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

Interversion limite-intégrale

Exercice 10

Calculer,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

Exercice 11

Dans cet exercice, on souhaite calculer l'intégrale de Gauss à l'aide des intégrales à paramètres.

1. Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}, \left| \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

2. En déduire que, pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ est convergente.

Dans toute la suite, on pose, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

3. Montrer que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.
4. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

5. Montrer que F est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0, F'(x) = -e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt.$$

6. Montrer que :

$$\forall x > 0, F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

7. Montrer que $\int_0^{+\infty} F'(x) dx = -\frac{\pi}{2}$.

8. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} F'(x) dx = -\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du\right) \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx\right).$$

9. À l'aide du changement de variables $u^2 = x$, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

10. Déduire des questions précédentes que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$