

## Feuille de TD 2 : Séries de Fourier

### Exercice 1

Déterminer la décomposition en série de Fourier de la fonction

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(5x) + \sin(2x) \end{array}$$

### Exercice 2

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$ -périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie en tout  $x \in [-\pi, \pi]$  par :  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ .

1. Déterminer la série de Fourier de  $f$  et montrer qu'elle converge normalement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. En déduire les sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

3. Calculer pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}.$$

4. Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ .

### Exercice 3

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = |x|.$$

1. Déterminer la série de Fourier réelle de  $f$ .
2. Montrer que la série de Fourier de  $f$  converge simplement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. La série de Fourier de  $f$  converge-t-elle uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ ?
4. Calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

5. Calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

### Exercice 4

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique telle que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad f(x) = x^2.$$

1. Déterminer la série de Fourier réelle de  $f$ .
2. Montrer que la série de Fourier de  $f$  converge simplement vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. La série de Fourier de  $f$  converge-t-elle uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ ?
4. Calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

5. Calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

### Exercice 5

Soit  $f(\theta)$  la fonction périodique de période  $2\pi$  qui sur  $[-\pi, \pi]$  vaut 1 si  $\theta \geq 0$  et  $-1$  si  $\theta < 0$ .

1. Décomposer  $f$  en série de Fourier. En quel sens a lieu la convergence de la série vers la fonction  $f$ .
2. La série converge-t-elle uniformément sur  $[-\pi, \pi]$ ?
3. Calculer la somme

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$