

Feuille de TD 3 : Réduction

Exercice 1

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres pour A .
2. Diagonaliser A . En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Dans toute la suite, I_3 désigne la matrice identité de taille 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que le polynôme caractéristique de A , noté χ_A , est égal à $-(X-1)^2(X+2)$.
2. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_2 = \text{Ker}(A + 2I_4)$, associé à la valeur propre 2.
3. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_1 = \text{Ker}(A - I_4)^2$, associé à la valeur propre 1.
4. Soit la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

5. On pose $D = P \text{diag}(-2, 1, 1) P^{-1}$ où $\text{diag}(-2, 1, 1) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont -2 , 1 et 1 . On pose aussi $N = A - D$.
Montrer que D est diagonalisable, que N est nilpotente et que N et D commutent.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n .

7. On considère les suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n - z_n \\ z_{n+1} = 2x_n - z_n \end{cases}$$

Donner les expressions de x_n , y_n et z_n en fonction de l'entier n .

Exercice 3

Expliquer sans calculs pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Dans toute la suite, I_3 désigne la matrice identité de taille 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que le polynôme caractéristique de A , noté χ_A , est égal à $-(X+1)(X-2)^2$.
2. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_{-1} = \text{Ker}(A + I_3)$, associé à la valeur propre -1 .
3. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)^2$, associé à la valeur propre 2 .
4. Soit la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

5. On pose $D = P \text{diag}(-1, 2, 2) P^{-1}$ où $\text{diag}(-1, 2, 2) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont -1 , 2 et 2 . On pose aussi $N = A - D$.

Montrer que D est diagonalisable, que N est nilpotente et que N et D commutent.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n .

7. On considère les suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= 2x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} &= 3x_n + 3y_n - 4z_n \\ z_{n+1} &= 3x_n + y_n - 2z_n \end{cases}$$

Donner les expressions de x_n , y_n et z_n en fonction de l'entier n .

8. On pose $e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

- (a) Justifier la convergence de la série $\sum \frac{A^n}{n!}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
(b) Calculer e^A .

Exercice 5

On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier sans aucun calcul que la matrice A est diagonalisable.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Montrer que ${}^t X A X \geq 0$ et ${}^t X A X = 0$ si et seulement si X est le vecteur nul.
3. Calculer les valeurs propres de A . En déduire que A est définie positive.
4. Diagonaliser A dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.