2022-2023
AF-TC

Analyse Fonctionnelle - Examen du 05/01/2023

Correction

Exercice 1 :

1. Soit (f_n) une suite d'éléments de E qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers f. Montrons que $f \in E$, i.e. f est nulle p.p sur A.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_A |f_n - f|^2 + \int_{A^c} |f_n - f|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f_n - f|^2$

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_A |f_n - f|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_n - f|^2$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est nulle p.p sur A, d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_A |f_n - f|^2 = \int_A |f|^2$ et on en déduit que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_A |f|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_n - f|^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par hypothèse.

D'où $\int_A |f|^2 = 0$ et f est nulle pp sur A.

Donc E est fermé dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors : $f = \mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_{A^c} f$.

Or, pour tout $x \in A$, $\mathbb{1}_{A^c}(x) = 0$ donc $\mathbb{1}_{A^c} f$ est nulle sur A et $\mathbb{1}_A f \in E$.

De plus : $(\mathbb{1}_A f \mid \mathbb{1}_{A^c} f) = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{1}_A f)(x) \overline{(\mathbb{1}_{A^c} f)(x)}\, dx$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_{A^c}(x)\,|f(x)|^2\,dx$$

Mais : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_{A^c}(x) = 0$ car si $x \in A$, $\mathbb{1}_{A^c}(x) = 0$
et si $x \notin A$, $\mathbb{1}_A(x) = 0$.

Donc : $\mathbb{1}_A f \perp \mathbb{1}_{A^c} f$.

Finalement : $f = \mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_{A^c} f$ avec $\mathbb{1}_{A^c} f \in E$ et $\mathbb{1}_A f \perp \mathbb{1}_{A^c} f$. Par définition du projeté orthogonal sur E (comme E est fermé, $L^2(\mathbb{R}^d) = E \oplus E^\perp$),

$$P(f) = \mathbb{1}_{A^c} f.$$

Exercice 2 :

1. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) - f_n(0) = \int_0^x f_n'(t)\,dt$

car f_n est supposée C^1 sur $[0,1]$.

D'où par CVU de (f_n) vers f sur $[0,1]$ (CVS suffit ici) et CVU de (f_n') vers g qui permet d'intervertir la limite et l'intégrale :

$$\forall x \in [0,1], f(x) - f(0) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^x f_n'(t)\,dt = \int_0^x \lim_{n\to+\infty} f_n'(t)\,dt$$

$$= \int_0^x g(t)\,dt.$$

D'où : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x \underbrace{g(t)}_{C^0}\,dt$

et f est C^1 sur $[0,1]$. De plus,

$\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = g(x)$ d'où $f' = g$.

2. (a) Montrons que le graphe de T est fermé.

Soit $((f_n, T(f_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments du graphe de T qui converge vers $(f, g) \in F \times E$ pour la topologie produit associée aux topologies sur F et E pour la norme $\| \|_\infty$. Ainsi, (f_n) CVU vers f sur $[0,1]$ et $(T(f_n)) = (f_n')$ CVU vers g sur $[0,1]$.

Comme de plus F est fermé, $f \in F$.

Par 1. f est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $f' = g$.

i.e $(f, g) = (f, f') = (f, T(f)) \in \Gamma(T)$ le graphe de T. Donc $\Gamma(T)$ est fermé. Comme $(E, \| \|_\infty)$ est un espace de Banach, par le théorème du graphe fermé, T est continue. (T est clairement linéaire)

(b) Comme $F \subset E = C([0,1])$, on va appliquer le théorème d'Ascoli à la boule unité de F que l'on note B_F.

- Tout d'abord, si $x \in [0,1]$ on a :

$$\forall f \in B_F, \quad |f(x)| \leq \|f\|_\infty \leq 1$$

Donc $\{f(x)\}_{f \in B_F}$ est ponctuellement bornée pour tout $x \in [0,1]$.

- Montrons l'équicontinuité de B_F. Soit $\varepsilon > 0$.

Par 2.(a), il existe $C > 0$ telle que : $\forall f \in F, \|T(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$

Posons $\eta = \varepsilon / C$ et soient $x, y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \eta$.

Alors

$$\forall f \in B_F, \ |f(x) - f(y)| = \left|\int_x^y f'(t)\,dt\right| \leq |x-y| \, \|f'\|_\infty$$

$$= |x-y| \, \|T(f)\|_\infty \leq \varepsilon/C \; C \underbrace{\|f\|_\infty}_{\leq 1} \leq \varepsilon$$

Donc B_F est équicontinue.

Par Ascoli, B_F est relativement compacte et fermée donc compacte.

(c) Comme B_F est compacte, par le théorème de Riesz, F est de dimension finie

Exercice 3 :

1. $$2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) \geq |f_n - f|^p$$

$$|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \, |f_n|^k |f|^{p-k}$$

On, $\forall x \in \Omega, \forall k \in [\![0,p]\!]$, $|f_n(x)|^k \, |f(x)|^{p-k} \leq \frac{1}{2}\left(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p\right)$

(si $f_n(x) \leq f(x)$, $|f_n(x)|^k |f(x)|^{p-k} \leq |f(x)|^p$

et si $f(x) \leq f_n(x)$, $|f_n(x)|^k \, |f(x)|^{p-k} \leq |f_n(x)|^p$)

D'où : $|f_n - f|^p \leq \sum_{k=0}^{p} C_n^k \left(|f_n|^p + |f|^p\right) \times \frac{1}{2}$

$= 2^{p-1}\left(|f_n|^p + |f|^p\right)$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \geq 0$. Preuve plus simple à la fin.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_\Omega g_n = \int_\Omega 2^{p-1}\left(|f_n|^p + |f|^p\right) - |f_n - f|^p$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_\Omega |f_n - f|^p \leq \int_\Omega 2^{p-1}\left(|f_n|^p + |f|^p\right)$

De plus, par le lemme de Fatou,

$$\int_\Omega \liminf g_n \leq \liminf \int_\Omega g_n$$

soit encore :

$$2^p \|f\|_p^p = \int_\Omega 2^p |f|^p \leq \liminf \left(-\int_\Omega |f_n - f|^p\right) + 2^p \|f\|_p^p$$

On en déduit que $0 \leq \liminf \left(-\int_\Omega |f_n - f|^p\right)$

d'où. $\limsup \int_\Omega |f_n - f|^p \leq 0$

Ainsi,

$$0 \leq \liminf \int_\Omega |f_n - f|^p \leq \limsup \int_\Omega |f_n - f|^p \leq 0$$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_\Omega |f_n - f|^p = 0$ i.e $\|f_n - f\|_p^p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc (f_n) tend vers f dans L^p.

Exercice 4 :

1. On a pour $a>0$,

$$\|G_a\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{\sqrt{a\pi}} e^{-x^2/a} \right| dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/a} \frac{dx}{\sqrt{a}}$$

$y = \frac{x}{\sqrt{a}}$, $dy = \frac{dx}{\sqrt{a}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = 1.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$(G_2 * G_2)(x) = \int_{\mathbb{R}} G_2(x-y)\, G_2(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2} - \frac{(x-y)^2}{2}} \, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2} + xy - y^2} \, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{xy - y^2} \, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4} + 2 \frac{1}{2} xy - y^2} \, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(y - \frac{x}{2}\right)^2} \, dy \qquad u = y - \frac{x}{2}, \; du = dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \, dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} = G_4(x).$$

Donc, $G_2 * G_2 = G_4$.

On a alors : $\|G_2 * G_2\|_\infty \leq \|G_2\|_1 \|G_2\|_\infty = \|G_2\|_\infty$.
avec l'inégalité de Young pour $r=\infty$, $p=1$ et $q=\infty$.

D'où : $\|G_4\|_\infty \leq \|G_2\|_\infty$.

<u>Retour à Exercice 3 Q1 :</u>

On a, par convexité de $x \mapsto x^p$ sur $\mathbb{R}_+$ (car $p \geq 1$) :

$$\forall a, b \geq 0, \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p+b^p}{2}.$$

D'où avec $a = |f_n|$, $b = |f|$:

$$\forall n, \quad \left(\frac{|f_n - f|}{2}\right)^p \leq \left(\frac{|f| + |f_n|}{2}\right)^p \leq \frac{|f|^p + |f_n|^p}{2} \Rightarrow |f_n - f|^p \leq 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p)$$

et $g_n \geq 0$.