Institut Galilée **2022-2023**
Master 1 de Mathématiques
Analyse fonctionnelle

Examen d'Analyse Fonctionnelle - Option Fondamentale

Le 5 janvier 2023

Durée de l'épreuve : 1h30.

Seuls les documents de cours et de TD sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document.
Les calculatrices et moyens de communication sont interdits.

NB: Ne pas hésiter à admettre le résulat d'une question pour pouvoir traiter la suite du problème.

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ des fonctions de carré intégrable sur $[0,2\pi]$, à valeurs complexes, muni du produit scalaire

$$\forall f,g \in H,\ (f|g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

et de la norme associée notée $||\cdot||_2$,

$$\forall f \in H,\ ||f||_2 = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

On désigne par T l'opérateur de H dans H défini par :

$$\forall f \in H,\ \forall x \in [0,2\pi],\ (Tf)(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

1. **(1.5pts)** Démontrer que T est un opérateur borné.
2. **(1.5pts)** Démontrer que T est auto-adjoint.
3. **(2pts)** Montrer que l'image de T, $\mathrm{Im}(T)$, est incluse dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,2\pi]$ à valeurs complexes.
4. **(3pts)** Démontrer que T est un opérateur compact.

   On rappelle que si $f \in H$, on peut écrire

   $$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n \quad \text{où pour tout } x \in [0,2\pi],\ e_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{et} \quad c_n(f) = (f|e_n),$$

   avec convergence de la série dans H.

5. **(2pts)** Montrer que : $\forall f \in H,\ Tf = \pi\,(c_1(f)e_1 + c_{-1}(f)e_{-1})$.
6. **(3pts)** En déduire que la norme de T dans $\mathcal{L}(H)$ vaut $||T||_{\mathcal{L}(H)} = \pi$.
7. **(2pts)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Montrer que l'équation en $f \in H$, $Tf = \lambda f$ est équivalente à

   $$\left\{\begin{array}{rcl} (\pi-\lambda)c_{-1}(f) & = & 0 \\ (\pi-\lambda)c_1(f) & = & 0 \\ \forall n \notin \{-1,1\},\ \lambda c_n(f) & = & 0 \end{array}\right.$$

8. **(3pts)** En déduire que l'ensemble des valeurs propres de T est $\{0,\pi\}$. Déterminer l'espace propre associé à la valeur propre π ainsi que l'espace propre associé à la valeur propre 0.
9. **(2pts)** Déterminer le spectre de T.

Institut Galilée **2022-2023**
Master 1 of Mathematics
Functional Analysis

Functional Analysis - Bounded operators - Final exam

January 5th, 2023

Duration : 1h30min.

Only courses and exercises sessions materials are authorized. No other document (books, etc..) is authorized.

Communication devices are not allowed to be used.

NB: You can admit the result of a question to continue to solve the next questions of the problem.

We consider the Hilbert space $H = L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ of complex-valued square-integrable functions on the interval $[0, 2\pi]$ endowed with the scalar product

$$\forall f, g \in H,\ (f|g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

and the associated norm denoted by $||\cdot||_2$,

$$\forall f \in H,\ ||f||_2 = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Let T from H to H be the operator defined by :

$$\forall f \in H,\ \forall x \in [0, 2\pi],\ (Tf)(x) = \int_0^{2\pi} \cos(x - t) f(t)\mathrm{d}t$$

1. **(1.5pts)** Show that T is a bounded operator.
2. **(1.5pts)** Show that T is self-adjoint.
3. **(2pts)** Show that the range of T, $\mathrm{Im}(T)$, is included in the set of complex-valued continuous functions on $[0, 2\pi]$.
4. **(3pts)** Show that T is a compact operator.

   Recall that if $f \in H$, one can write

   $$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n \quad \text{where for every } x \in [0, 2\pi],\ e_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{and} \quad c_n(f) = (f|e_n),$$

   with convergence of the infinite sum in H.

5. **(2pts)** Show that : $\forall f \in H,\ Tf = \pi\,(c_1(f)e_1 + c_{-1}(f)e_{-1})$.
6. **(3pts)** Deduce that the operator norm of T satisfies $||T||_{\mathcal{L}(H)} = \pi$.
7. **(2pts)** Let $\lambda \in \mathbb{R}$ a real number. Show that the equation in $f \in H$, $Tf = \lambda f$ is equivalent to

   $$\begin{cases} (\pi - \lambda)c_{-1}(f) & = & 0 \\ (\pi - \lambda)c_1(f) & = & 0 \\ \forall n \notin \{-1, 1\},\ \lambda c_n(f) & = & 0 \end{cases}$$

8. **(3pts)** Deduce that the set of eigenvalues of T is $\{0, \pi\}$. Determine the eigenspace associated to the eigenvalue π and the eigenspace associated to the eigenvalue 0.
9. **(2pts)** Determine the spectrum of T.