Université Sorbonne Paris Nord — Janvier 2023
Institut Galilée – M1 Mathématiques

Examen d'Analyse Fonctionnelle – Tronc Commun

Durée de l'épreuve : 1 heure 30.

Seuls les documents de cours et TD sont autorisés. Calculatrices et moyens de communication interdits.

NB: Ne pas hésiter à admettre le résultat d'une question pour pouvoir traiter la suite d'un exercice.

Exercice 1. Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^d$, et soit E le sous-espace vectoriel des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui sont nulles presque partout sur A.

1. Montrer que E est fermé dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ (Indication : on pensera à utiliser la fonction $\mathbb{1}_A$).
2. Montrer que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la projection orthogonale P sur E est donnée par $P(f) = \mathbb{1}_{A^c} f$, où $A^c = \mathbb{R}^d \setminus A$.

Exercice 2.

1. Soient f, g des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f et (f_n') converge uniformément vers g, alors f est de classe C^1 et $f' = g$. (Indication : utiliser une intégrale).
2. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Soit F un sous-espace vectoriel *fermé* de E. On suppose que tous les éléments de F sont de classe C^1.
   (a) Soit l'application $T : F \to E$ définie par $T(f) = f'$. En utilisant la question 1 et le théorème du graphe fermé, montrer que T est continue.
   (b) En déduire que la boule unité fermée de F est compacte.
   (c) En déduire que F est de dimension finie.

Exercice 3. Soit $p \in [1, \infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note $L^p = L^p(\Omega)$. Soit $f \in L^p$ et (f_n) une suite de L^p.

1. Soit $g_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$. Vérifier que $g_n \geq 0$.
2. Montrer que si $f_n \to f$ p.p. et $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, alors $f_n \to f$ dans L^p. (Indication : on appliquera le lemme de Fatou à la suite (g_n).)

Exercice 4. On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. Pour $a > 0$ on pose

$$G_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a\pi}} e^{-x^2/a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que $\|G_a\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$ pour tout $a > 0$.
2. Montrer que $G_2 * G_2 = G_4$. Commenter le résultat en relation avec une inégalité sur les produits de convolution.

Université Sorbonne Paris Nord
Institut Galilée – M1 Mathematics

January 2023

Exam of Functional Anaysis – Common Part

Duration : 1 hour and 30 minutes.

Only the documents from the lectures and the exercise classes are authorized. Calculators and communication devices are not allowed.

NB: Do not hesitate to admit the result of a question to treat the subsequent ones.

Exercice 1. Let A be a measurable subset of $\mathbb{R}^d$, and let E be the linear space of functions of $L^2(\mathbb{R}^d)$ which are zero a.e. on A.

1. Prove that E is closed in $L^2(\mathbb{R}^d)$ (Hint: make use of the function $\mathbb{1}_A$).
2. Prove that, for all $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, the orthogonal projection P on E is given by $P(f) = \mathbb{1}_{A^c} f$, where $A^c = \mathbb{R}^d \setminus A$.

Exercice 2.

1. Let f, g be continuous functions from $[0,1]$ to $\mathbb{R}$ and $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of functions of class C^1 from $[0,1]$ to $\mathbb{R}$. Prove that if (f_n) converges uniformly to f and (f_n') converges uniformly to g, then f is of class C^1 and $f' = g$. (Hint: use an integral).
2. Let $E = C([0,1], \mathbb{R})$ equipped with the norm $\|\cdot\|_\infty$. Let F be a *closed* linear subspace of E. We assume that all the elements of F are of class C^1.
   (a) Let the map $T : F \to E$ be defined by $T(f) = f'$. By using question 1 and the closed graph theorem, prove that T is continuous.
   (b) Deduce that the closed unit ball of F is compact.
   (c) Deduce that F has finite dimension.

Exercice 3. Let $p \in [1, \infty[$, Ω be an open subset of $\mathbb{R}^d$ and denote $L^p = L^p(\Omega)$. Let $f \in L^p$ and (f_n) be a sequence of L^p.

1. Let $g_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$. Check that $g_n \geq 0$.
2. Prove that if $f_n \to f$ a.e. and $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, then $f_n \to f$ in L^p. (Hint: apply Fatou's lemma to the sequence (g_n).)

Exercice 4. We recall that $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. For $a > 0$ we set

$$G_a(x) = \frac{1}{\sqrt{a\pi}} e^{-x^2/a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Check that $\|G_a\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$ for all $a > 0$.
2. Prove that $G_2 * G_2 = G_4$. Comment the result in relation with an inequality for convolution products.