Institut Galilée **2022-2023**
Filière M1
Analyse fonctionnelle

Feuille de TD 1 : Théorèmes de l'analyse fonctionnelle

1. Théorème de Baire

Exercice 1

Trouver une suite $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts denses de $\mathbb{R}$ telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ ne soit pas ouvert.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f(na) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant le théorème de Baire aux fermés $F_p = \{a \geq 0\ ,\ \forall n \geq p,\ |f(na)| \leq \varepsilon\}$, montrer que f admet une limite nulle en $+\infty$.

Exercice 3

Soit f une fonction entière, c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$. Montrer que si en chaque point $z \in \mathbb{C}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(z) = 0$, alors f est un polynôme.
Indication : on pourra utiliser les fermés

$$F_n = \{z \in \mathbb{C},\ f^{(n)}(z) = 0\}.$$

Exercice 4

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts denses de $\mathbb{R}$.
1. Rappeler pourquoi $V = \cap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = V_n \setminus \{x_0, \ldots, x_n\}$ est un ouvert dense dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire que V ne peut être fini ou dénombrable.

Exercice 5

Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers une fonction f.
1. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_{m,n} = \{x \in E,\ |f_m(x) - f_l(x)| \leq \tfrac{1}{n},\ \forall l \in \mathbb{N},\ l \geq m\}.$$

Montrer que $A_{m,n}$ est un fermé de E.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que $E = \cup_{m\in\mathbb{N}} A_{m,n}$.
3. On pose $O_{m,n} = \mathrm{Int}(A_{m,n})$. Montrer que $O_n = \cup_{m\in\mathbb{N}} O_{m,n}$ est un ouvert dense de E.
4. Nous allons montrer que f est continue en tout point de $G = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$. Soit $a \in G$ et soit $\varepsilon > 0$.
a. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $x \in O_{m,n}$, $|f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
b. Pour cet entier m, montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $|f_m(x) - f_m(a)| \leq \varepsilon$.
c. Déduire des questions précedentes que f est continue au point a.
5. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f est un résiduel de E.
6. La fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, est-elle la limite simple sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues?

2. Théorèmes de Banach-Steinhaus et de l'application ouverte

Exercice 6

On note

$$\ell^2(\mathbb{N}^*) = \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \ \Big|\ \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 < +\infty \right\}$$

que l'on munit de la norme $||\cdot||_{\ell^2}$ définie par

$$\forall x \in \ell^2(\mathbb{N}^*),\ ||x||_{\ell^2} = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit

$$E = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}^*) \mid x_i = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } i\ \}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application linéaire $T_n : E \to \ell^2(\mathbb{N}^*)$ définie par :

$$\forall x \in E,\ \forall i \in \mathbb{N}^*,\ (T_n(x))_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq n \\ nx_n & \text{si} \quad i = n \end{cases}$$

Soient enfin $A = \{T_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ et pour tout $x \in E$, $A_x = \{T_n(x) \mid T_n \in A\}$.
1. Montrer que pour chaque $x \in E$, A_x est bornée dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$.

2. Soit $\mathcal{L}(E, \ell^2(\mathbb{N}^*))$ l'espace des applications linéaires continues de E dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ munit de la norme $|||\cdot|||$ définie par :

$$\forall T \in \mathcal{L}(E, \ell^2(\mathbb{N}^*)),\ |||T||| = \sup_{x\in E,\ ||x||_{\ell^2}=1} ||T(x)||_{\ell^2}.$$

Montrer que A n'est pas bornée dans $\mathcal{L}(E, \ell^2(\mathbb{N}^*))$.
3. Expliquer pourquoi le théorème de Banach-Steinhaus ne s'applique pas ici.

Exercice 7

Soient $\ell^1(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $||u||_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < +\infty$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $||u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
1. Soit $A = \{u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mid u_n = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } n\}$. Montrer que A est dense dans $(\ell^1(\mathbb{N}), ||\ ||_1)$ mais pas dans $(\ell^\infty(\mathbb{N}), ||\ ||_\infty)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de suite de réels strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$(a_n u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) \iff (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N}).$$

Exercice 8

Soit $E = L^1(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions 2π-périodiques localement intégrables sur $\mathbb{R}$, muni de la norme :

$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|dx$$

Soit $F = c_0(\mathbb{Z})$ l'espace des familles $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la norme $||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.
On se propose de montrer que l'application suivante n'est pas surjective :

$$T\ :\ \begin{array}{ccl} E & \to & F \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \end{array}$$

1. Rappeler pourquoi T est bien définie, linéaire, continue et injective.

2. Montrer que si T est surjective, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$,

$$||f||_{L^1} \leq \delta \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|$$

3. Pour tout $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, 2π-périodique, on choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes de module 1 telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\bar{\alpha} c_n(g) = |c_n(f)|$. En appliquant la question 2 à

$$f_N = \sum_{|n|\leq N} \alpha_n e^{inx},$$

montrer que, si T est surjective, pour tout $N \geq 0$,

$$\sum_{|n|\leq N} |c_n(g)| \leq \delta ||g||_\infty$$

4. Conclure.

Exercice 9

On désigne par E l'espace de Banach des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs complexes, muni de la norme $||\ ||_\infty$. On se donne un réel α tel que $0 < \alpha < 1$ et on note E_α le sous-espace de E constitué des fonctions f telles qu'il existe une constante $A > 0$ pour laquelle :

$$\forall x \in [0,1],\ \forall y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq A|x-y|^\alpha$$

On munit E_α de la norme :

$$||f||_\alpha = ||f||_\infty + \sup_{0\leq x\neq y\leq 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

Alors $(E_\alpha, ||\ ||_\alpha)$ est un espace de Banach. Soit F un sous-espace fermé de $(E, ||\ ||_\infty)$. On suppose que F est contenu dans E_α et on se propose de montrer que F est de dimension finie.

1. Montrer que F est fermé dans $(E_\alpha, ||\ ||_\alpha)$.

2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout élément f de F, $||f||_\alpha \leq C||f||_\infty$.

3. Conclure en étudiant la boule unité de $(F, ||\ ||_\infty)$.

3. Théorème d'Ascoli

Exercice 10

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme $||u||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|$.

1. Montrer que la boule unité de $(E, || \, ||_\infty)$ n'est pas compacte.

2. Pour $k \in \mathbb{R}_+$ et $M > 0$, on pose

$$F_{k,M} = \{u \in E \mid |u(0)| \leq M \text{ et } u \ k\text{−lipschitzienne}\}.$$

a. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $\{u(x) \mid u \in F_{k,M}\}$ est bornée.

b. Montrer que $F_{k,M}$ est équicontinue.

c. En déduire que $F_{k,M}$ est compacte.

Exercice 11

Soit $\ell^\infty(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées.

On le munit de la norme $||u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Alors $(\ell^\infty(\mathbb{N}), || \, ||_\infty)$ est un espace de Banach.

1. Montrer que la boule unité de $(\ell^\infty(\mathbb{N}), || \, ||_\infty)$ n'est pas compacte.

2. Soit $F = \{u \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq \frac{1}{n}\}$, que l'on munit de la norme $|| \, ||_\infty$ induite par celle sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

a. Soit $K = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$. Montrer que K est un compact de $\mathbb{R}$.

b. Soit $G = \{f \ : \ K \to \mathbb{R} \mid \forall x \in K, \ |f(x)| \leq x\}$, que l'on munit de la norme $|| \, ||_K$ définie par, pour toute $f \in G$, $||f||_K = \sup_{x\in K} |f(x)|$.

Montrer que G est fermé dans $C(K,\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$, pour la norme $|| \, ||_K$.

c. On considère l'application

$$T \ : \ \begin{array}{ccc} F & \to & G \\ u & \mapsto & \left(f \ : \ \begin{array}{ccc} K & \to & \mathbb{R} \\ \frac{1}{n} & \mapsto & u_n \\ 0 & \mapsto & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Montrer que T est un homéomorphisme de $(F, || \, ||_\infty)$ dans $(G, || \, ||_K)$.

d. En déduire que F est compacte si et seulement si G est compacte.

3.a Montrer que, pour tout $x \in K$, $\{f(x) \mid f \in G\}$ est bornée.

b. Montrer que G est équicontinue.

c. En déduire que G est compacte et que F est compacte.