

Feuille de TD 3 : Espaces L^p

Exercice 1 Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 < p < +\infty$.

1. Montrer que l'on peut définir, pour tout $x \geq 0$,
 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
2. Justifier que $F(x) = o(x^{(p-1)/p})$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\left(\int_a^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

4. En déduire que $F(x) = o(x^{(p-1)/p})$.

Exercice 2 Pour $1 \leq p < +\infty$, soit $\tau_a : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$ définie, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$, par $\tau_a(f)(x) = f(x-a)$.
Démontrer que, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a(f) - f\|_p = 0.$$

Indication : on pourra commencer par le cas où f est une fonction continue à support compact.

Exercice 3 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$Tf : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^1 f(x-y)dy \end{matrix}.$$

1. Montrer que, si f est continue à support compact, Tf est continue.
2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $(Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Tf uniformément sur $\mathbb{R}$. En déduire que Tf est continue sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément unité.

Exercice 4 Soient $f, g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ données par $f = \mathbf{1}_{]-1, 0]}$ et $g = \mathbf{1}_{]0, 1]}$

1. Soit $p \in [1, \infty[$. Calculer $\|f\|_p$, $\|g\|_p$, $\|f+g\|_p$ et $\|f-g\|_p$.
2. En déduire que si $p \neq 2$, alors $L^p(]-1, 1])$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 5 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie.

1. Montrer que pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Indication : on pourra montrer que la limsup est inférieure à $\|f\|_\infty$ et que pour tout $\varepsilon > 0$, la liminf est supérieure à $\|f\|_\infty - \varepsilon$.

2. Soit

$$f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega).$$

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\|f\|_p \leq C$. Montrer que $f \in L^\infty(\Omega)$.

3. Trouver $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$ tel que $f \notin L^\infty(\Omega)$.

Exercice 6 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose que pour tout $v \in X = L^1(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$.

1. Soit $\phi : X \rightarrow X$ définie par $\phi(v) = uv$. Montrer que le graphe de ϕ est fermé dans $X \times X$.
2. En déduire que $u \in L^\infty(\Omega)$. (Indication : on appliquera le théorème du graphe fermé, puis on raisonnera par l'absurde.)

Exercice 7 Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit F un sous-espace vectoriel de $L^\infty(X, \mu)$, fermé dans $L^p(X, \mu)$ pour un $p \in [1, +\infty[$. On se propose de montrer que F est de dimension finie.

1. (a) Montrer que F est fermé dans $L^\infty(X, \mu)$.
 (b) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour toute $f \in F$,

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

2. On suppose que $p \leq 2$. Montrer qu'il existe un réel $B_1 > 0$ tel que, pour toute $f \in F$,

$$\|f\|_{L^p} \leq B_1\|f\|_{L^2}.$$

3. On suppose que $p > 2$.

- (a) Montrer que, pour toute $f \in F$,

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^2}^{\frac{2}{p}} \|f\|_{L^\infty}^{\frac{p-2}{p}}.$$

- (b) En déduire qu'il existe un réel $B_2 > 0$ tel que, pour toute $f \in F$,

$$\|f\|_{L^p} \leq B_2\|f\|_{L^2}.$$

4. Déduire des questions précédentes que, pour tout $p \in [1, +\infty[$, il existe un réel $B > 0$ tel que, pour toute $f \in F$,

$$\|f\|_{L^\infty} \leq B\|f\|_{L^2}.$$

5. On munit F du produit scalaire de $L^2(X, \mu)$. Soit $N \geq 1$ un entier et soit $(e_1, \dots, e_N)$ un système orthonormé dans F .

- (a) Montrer que, pour μ -presque tout $x \in X$, pour tous $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$,

$$\left| \sum_{j=1}^N c_j e_j(x) \right| \leq \left\| \sum_{j=1}^N c_j e_j \right\|_\infty.$$

Indication : on pourra utiliser la densité de $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^N$ dans $\mathbb{C}^N$.

- (b) En déduire que, pour μ -presque tout $x \in X$, pour tous $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$,

$$\left| \sum_{j=1}^N c_j e_j(x) \right| \leq B \left(\sum_{j=1}^N |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- (c) Montrer que, pour μ -presque tout $x \in X$,

$$\sum_{j=1}^N |e_j(x)|^2 \leq B^2.$$

- (d) En déduire que $N \leq B^2 \mu(X)$.

6. Montrer que F est de dimension finie et que $\dim(F) \leq B^2 \mu(X)$.