M1

Mathématiques fondamentales

TD3 - Espaces L^p - Corrections

(1)

Exercice 1:

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$$

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in]1, +\infty[$.

1.-2. Soit $x \geq 0$. Par Hölder, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}$, on a :

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right| = \left|\int_0^x f(t) \times 1 dt\right| \leq \left(\int_0^x |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_0^x 1^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \|f\|_{L^p} \, x^{\frac{p-1}{p}}$$

D'où $F(x)$ est bien défini et on a : $F(x) = O\left(x^{\frac{p-1}{p}}\right)$.

②

3. On a : $\left(\int_a^{+\infty} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t)\, dt\right)^{1/p}$

Or, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{a \to +\infty} |f(t)|^p \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) = 0$ (il suffit de prendre $a > t$ pour obtenir 0 ...)

De plus : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}$, $\left| |f(t)|^p \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \right| \leq \underbrace{|f(t)|^p}_{\text{ind de } a}$ et $\in L^1(\mathbb{R})$ car $f \in L^p(\mathbb{R})$.

Donc, par le TCD, on a :

$$\left(\int_a^{+\infty} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0$$

i.e : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a > 0$, $\forall a' \geq a$, $\left(\int_{a'}^{+\infty} |f(t)|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$

et on prend $a' = a$.

③ 4. Soit $a \geq 0$ donné à la question 3. Soit $x \geq a$.

Alors : $|F(x) - F(a)| = \left| \int_a^x f(t)\,dt \right| \leq \int_a^x |f(t)|\,dt$

Hölder $\rightarrow \leq \left(\int_a^x |f(t)|^p\,dt \right)^{1/p} \left(\int_a^x 1^{\frac{p}{p-1}}\,dt \right)^{\frac{p-1}{p}}$

positivité $\rightarrow \leq \left(\int_a^{+\infty} |f(t)|^p\,dt \right)^{1/p} \left(\int_0^x dt \right)^{\frac{p-1}{p}}$

3. $\rightarrow \leq \varepsilon \, x^{\frac{p-1}{p}}$

D'où, par inégalité triangulaire : $\forall x \geq a$, $\dfrac{|F(x)|}{x^{\frac{p-1}{p}}} \leq \varepsilon + \dfrac{|F(a)|}{x^{\frac{p-1}{p}}}$

Or $\dfrac{|F(a)|}{x^{\frac{p-1}{p}}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc : $\exists x_0 \geq a, \forall x \geq x_0$, $\dfrac{|F(a)|}{x^{\frac{p-1}{p}}} \leq \varepsilon$.

Enfin : $\forall x \geq x_0$, $\dfrac{|F(x)|}{x^{\frac{p-1}{p}}} \leq 2\varepsilon$ d'où le résultat voulu.

④

Exercice 2

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $f \in C_0^0(\mathbb{R})$: continue à support compact. Soit $A > 0$ tel que $\operatorname{supp} f \subset [-A, A]$.

Comme f est C^0, nulle hors de $[-A, A]$ et C^0 sur le compact $[-A, A]$, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et a tel que $|a| < \eta_\varepsilon$. Alors : $|(x-a) - x| < \eta_\varepsilon$

D'où $|f(x-a) - f(x)| < \varepsilon$.

De plus, quitte à diminuer η_ε on peut supposer $|a| < 1$ et dans ce cas si $x \notin [-A-1, A+1]$, $x \notin [-A, A]$ et $x - a \notin [-A, A]$.

5

D'où $f(x-a) = f(x) = 0$ et $|f(x-a) - f(x)| = 0$.

Il vient : $\forall a$, $|a| < \min(1, \eta_\varepsilon)$,

$$\|\tau_a(f) - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |f(x-a) - f(x)|^p dx$$

$$= \int_{-A-1}^{A+1} |f(x-a) - f(x)|^p dx$$

$$\leq \int_{-A-1}^{A+1} \varepsilon^p dx = (2A+2)\varepsilon^p$$

Par définition : $\lim_{a \to 0} \|\tau_a(f) - f\|_p = 0$.

Le résultat est donc prouvé pour $f \in C_0^0(\mathbb{R})$.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme $C_0^0(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $\| \|_p$, il existe $g_\varepsilon \in C_0^0(\mathbb{R})$ telle

6

que $\|f-g_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$.

Par changement de variable $y = x-a$ on obtient de même que $\|\tau_a(f)-\tau_a(g_\varepsilon)\|_p \leq \varepsilon$.

Or, $g_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ donc il existe $\eta_\varepsilon > 0$ tel que si $|a| < \eta_\varepsilon$, $\|\tau_a(g_\varepsilon)-g_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$. Alors pour $|a| < \eta_\varepsilon$:

$$\|\tau_a(f)-f\|_p \leq \|\tau_a(f)-\tau_a(g_\varepsilon)\|_p + \|\tau_a(g_\varepsilon)-g_\varepsilon\|_p + \|g_\varepsilon - f\|_p$$
$$\leq 3\varepsilon$$

D'où le résultat voulu.

7

Exercice 3:

1. Soit $f \in C_c^0(\mathbb{R})$. Soit $A>0$, $\mathrm{supp} f \subset [-A, A]$.

Alors : (i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y) \in L^1(\mathbb{R})$ car $f \in L^1(\mathbb{R})$

(ii) $\forall y \in [0,1]$, $x \mapsto f(x-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$ est C^0

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $|f(x-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)| \leq \underbrace{M\mathbb{1}_{[0,1]}(y)}_{\in L^1(\mathbb{R}) \text{ et ind de } x}$

où M est un majorant de f sur $\mathbb{R}$

Donc par C^0 sous le signe intégral, Tf est C^0.

2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe bien par densité de $C_c^0(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$ pour $\| \|_1$.

8

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|Tf_n(x) - Tf(x)| \leq \int_0^1 |f_n(x-y) - f(x-y)|\,dy$

$$\leq \|f_n - f\|_1$$

D'où : $\|Tf_n - Tf\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CV uniformément vers Tf sur $\mathbb{R}$. Comme chaque Tf_n est C^0 sur $\mathbb{R}$ par 1., on en déduit que Tf l'est aussi.

3. On remarque que : $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $Tf = f * \mathbb{1}_{[0,1]}$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que : $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $f * u = f$. Alors : $Tu = u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \mathbb{1}_{[0,1]}$.
Or $u \in L^1(\mathbb{R})$ donc par 2. Tu est C^0 et $\mathbb{1}_{[0,1]}$ serait C^0 sur $\mathbb{R}$!

Exercice 4:

1. On a : $\|f\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |\mathbb{1}_{]-1,0[}(x)|^p \, dx\right)^{1/p} = \left(\int_{-1}^{0} dx\right)^{1/p} = 1$

De même $\|g\|_p = 1$. Puis :

$$\|f+g\|_p = \int_{-1}^{1} |\mathbb{1}_{]-1,0[}(x) + \mathbb{1}_{]0,1[}(x)|^p \, dx\Big)^{1/p} = \left(\int_{-1}^{1} dx\right)^{1/p} = 2^{1/p}$$

et $$\|f-g\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |\mathbb{1}_{]-1,0[}(x) - \mathbb{1}_{]0,1[}(x)|^p \, dx\right)^{1/p} = 2^{1/p}.$$

2. Supposons par l'absurde que pour $p \neq 2$, $L^p([-1,1])$ soit un espace de Hilbert. Par l'identité du parallélogramme, $\forall f, g \in L^p([-1,1])$, $2(\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2) = \|f-g\|_p^2 + \|f+g\|_p^2$

(10) Pour f et g comme à la question 1 on obtiendrai :

$$2\times(1+1) = 2^{2/p}+2^{2/p} \Leftrightarrow 4 = 2\times 2^{2/p}$$
$$\Leftrightarrow 2 = 2^{2/p} \Leftrightarrow p = 2.$$

Donc pour $p\neq 2$, $L^p([-1,1])$ n'est pas un espace de Hilbert.

11

Exercice 5

1. Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Puisque Ω est de mesure finie, pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$

$$\leq \|f\|_\infty \left(\int_\Omega dx\right)^{1/p}$$

et $f \in L^p(\Omega)$.

$$= \|f\|_\infty \, \mu(\Omega)^{1/p} < +\infty$$

De plus en prenant la limsup dans l'inégalité précédente :

$$\limsup_{p \to +\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \underbrace{\limsup_{p\to+\infty} \mu(\Omega)^{1/p}}_{= \lim_{p\to+\infty} \mu(\Omega)^{1/p} = 1}$$

D'où : $\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.

(12)

Puis : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \Omega_0 \subset \Omega$, $Leb(\Omega_0) > 0$, $\forall x \in \Omega_0$,

$$|f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$$

par définition de $\| \|_\infty$ dans $L^\infty(\Omega)$. D'où par positivité,

$$\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{\Omega_0} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \geq \left(\int_{\Omega_0} (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p dx\right)^{1/p} = (\|f\|_\infty - \varepsilon)\, \mu(\Omega_0)^{1/p}$$

i.e $\|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)\, \mu(\Omega_0)^{1/p}$ d'où :

$$\liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \liminf_{p\to+\infty} \mu(\Omega_0)^{1/p} = \|f\|_\infty - \varepsilon$$

On en déduit que : $\forall \varepsilon > 0$, $\|f\|_\infty \geq \limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$

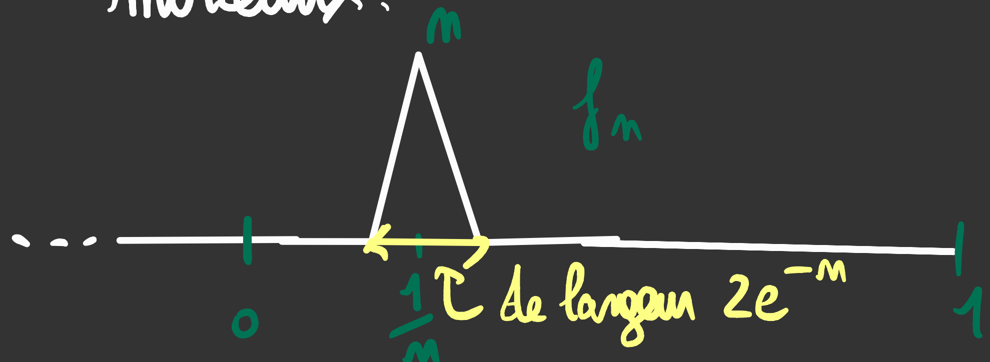
d'où $\limsup_{p\to+\infty} \|f\|_p = \liminf_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ et $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

13

2. On a : $\forall p \geq 1$, $\|f\|_p \leq C$. D'où $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p \leq C$

i.e $\|f\|_\infty \leq C$ et $f \in L^\infty(\Omega)$

3. On peut par exemple considérer la fonction affine par morceaux :



$\Omega = [0,1]$

Posons $f = \sum_{n \geq 2} f_n$

Alors $f \notin L^\infty([0,1])$

Mais si $p \in [1, +\infty[$, $\|f\|_p \leq \sum_{n \geq 2} n^p e^{-n} < +\infty$.

et $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$

14

Exercice 6

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui cv vers v dans $L^1(\Omega)$ et telle que $(\phi(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ cv dans $L^1(\Omega)$ vers w.

Montrons que $w=\phi(v)=uv$.

Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers v dans $L^1(\Omega)$, on peut extraire de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui cv presque partout vers v dans Ω. Puis comme $(\phi(v_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$, cv vers w dans $L^1(\Omega)$ (comme suite extraite) on peut en extraire une sous-suite $(\phi(v_{\varphi\circ\psi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ qui cv vers w pp sur Ω.

Alors $(v_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ cv aussi pp vers v sur Ω comme

15

suite extraite de $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ donc $(u\, v_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ cv p.p vers $u\,v$ sur Ω. Par unicité de la limite, $u\,v = w$ pp sur Ω et donc dans $L^1(\Omega)$.

Donc le graphe de ϕ est fermé.

16

2. Par le théorème du graphe fermé, l'application linéaire

$\phi : \begin{array}{l} L^1(\Omega) \to L^1(\Omega) \\ v \mapsto uv \end{array}$ est continue, donc :

$\exists C>0, \forall v \in L^1(\Omega), \|uv\|_1 \leq C \|v\|_1$.

Soit $x \in \Omega$. Soit $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \subset \Omega$ et soit ρ_ε une fonction C^∞ à support compact, $\operatorname{supp} \rho_\varepsilon \subset B(x,\varepsilon)$, $\rho_\varepsilon \geq 0$ et $\int_\Omega \rho_\varepsilon = 1$. Alors $\rho_\varepsilon \in L^1(\Omega)$ et $y \mapsto \rho_\varepsilon(x-y)$ l'est aussi pour y tel que $x-y \in \Omega$.

On a alors : $\forall \varepsilon > 0, \|u \rho_\varepsilon\|_1 \leq C \|\rho_\varepsilon\|_1$

Or $\|\rho_\varepsilon\|_1 = 1$ et $\|u \rho_\varepsilon\|_1 = (|u| * \rho_\varepsilon)(x) \underset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} |u(x)|$.

D'où : $|u(x)| \leq C$ et $u \in L^\infty(\Omega)$.