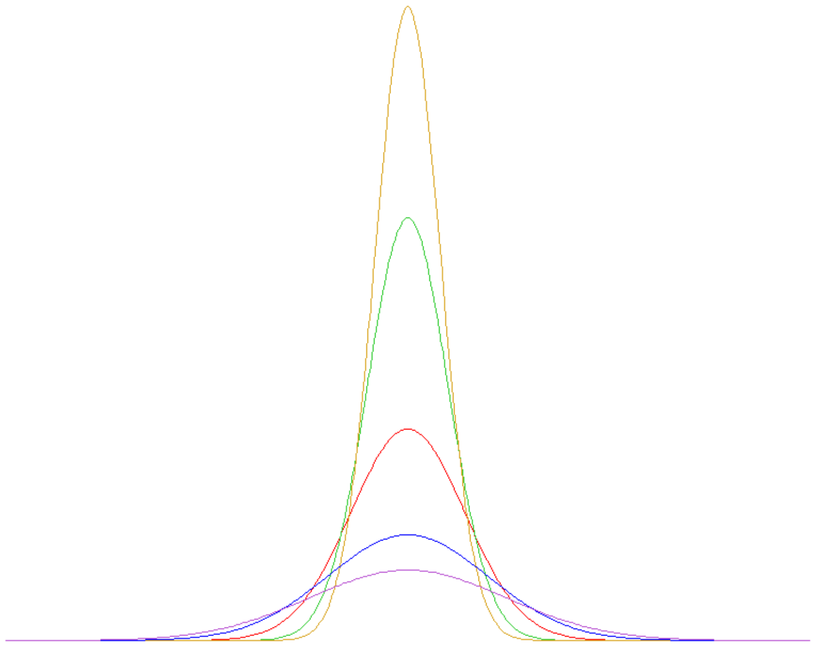
U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs MACS

Année scolaire 2023-2024

Théorie des distributions

2023-2024 : H. Boumaza, B. Rittaud
2021-2023 : H. Boumaza, C. Valcu, B. Rittaud
2020-2021 : H. Boumaza, T. Duyckaerts, E. Schenck



Le 11 septembre 2023

Bibliographie

[1] J.M. Bony, *Cours d'analyse, Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, Ellipses.

[2] G. Carlier, *Notes de cours : Analyse fonctionnelle*,
https ://www.ceremade.dauphine.fr/ carlier/poly2010.pdf

[3] J. Faraut, *Calcul intégral*, 2006, EDP Sciences.

[4] F. Golse, *Notes de cours : Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*, http ://www.cmls.polytechnique.fr/perso/golse/MAT431-10/POLY431.pdf

[5] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (256), Springer.

[6] J.P. Marco et autres, *Mathématiques L3, Analyse* , Pearson Education France.

[7] B. Simon et M. Reed, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press, New York-London, 1975.

[8] C. Zuily, *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*, Sciences Sup, Dunod.

Table des matières

Première partie

Notions de bases

Chapitre 1

Introduction à la théorie des distributions

On introduit ici quelques notions et idées de la théorie de distribution, sans donner de définition rigoureuse. Le but est de motiver la théorie des distributions proprement dite qui sera définie et étudiée dans les chapitres suivants.

1.1 Autour du Dirac

Il est parfois utile, dans la résolution de certains problèmes de la Physique, de considérer des objets, appelés couramment par abus de langage "fonctions", mais mal définies comme représentations ponctuelles. L'exemple le plus célèbre en est l'impulsion de Dirac, qui, si elle est considérée comme une fonction, est "nulle en dehors de 0, infinie en 0".
Il est clair cette définition de l'impulsion de Dirac n'est pas complète, car elle ne permet pas de définir cet objet de manière unique. En effet, si δ_0 est "nulle en dehors de 0, infinie en 0", il en est de même de n'importe quel multiple positif de δ_0 (par exemple $2\delta_0$). Pour pallier ce manque d'unicité, on introduit la condition supplémentaire que "l'intégrale de δ_0 sur $\mathbb{R}$ vaut 1".
Une première tentative, simpliste, de définir δ_0 serait de considérer δ_0 comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0, \infty]$, en posant $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $\delta(0) = \infty$. Une telle fonction est nulle presque partout et s'identifie donc, dans n'importe quel espace L^p, à la fonction 0. On ne peut donc pas considérer rigoureusement δ_0 comme une fonction sur $\mathbb{R}$.
On va plutôt envisager δ_0 comme une limite de fonction. Considèrons, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction, ϕ_ε définie sur $\mathbb{R}$

$$\phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon - |x|) & \text{si } |x| < \varepsilon. \end{cases} \tag{1.1}$$

On vérifie facilement :

$$\int \phi_\varepsilon(x)\, dx = 1, \quad |x| \geq |\varepsilon| \Longrightarrow \phi_\varepsilon(x) = 0$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \phi_\varepsilon(0) = +\infty.$$

En passant formellement à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient un objet ayant les propriétés voulues. On a donc envie de définir δ_0 comme la limité de ϕ_ε quand $\varepsilon \to 0$. On remarque que $\varepsilon \to 0$, ϕ_ε tend vers 0 simplement sur $\mathbb{R}^*$, mais que cette convergence n'a pas lieu dans L^1 ou d'autres espaces de fonctions usuelles.

Pour donner un sens à la limite de ϕ_ε, on va introduire l'idée centrale de la théorie des distributions, proche de la notion "d'observables" de la mécanique quantique : on considère ϕ_ε non pas comme une fonction, mais comme un opérateur sur un espace de fonctions (appelé *fonctions test*) défini par la formule :

$$\chi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(x)\chi(x)dx.$$

Soit donc χ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(x)\chi(x)dx = \chi(0)\int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(x)dx + \int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(x)\left(\chi(x)-\chi(0)\right)dx.$$

On a $\int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(x)dx = 1$ et en utilisant cette propriété et la positivité de ϕ_ε,

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(x)\left(\chi(x)-\chi(0)\right)dx\right| \leq \sup_{-\varepsilon\leq x\leq\varepsilon} \left(\chi(x)-\chi(0)\right).$$

Par continuité de χ en 0, cette dernière quantité tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. On en déduit :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(x)\chi(x)dx = \chi(0).$$

On peut donc voir l'impulsion de Dirac comme l'application qui a une fonction χ associe $\chi(0)$. Nous connaissons déjà un tel objet : c'est la mesure discrète chargeant 0 définie dans l'appendice (cf exemple A.1.8). L'impulsion de Dirac est d'ailleurs souvent appelé "mesure de Dirac". L'intérêt de la théorie des distributions est d'introduire un cadre général regroupant les fonctions (c'est à dire les éléments de L^1_{loc}), les mesures, et des objets plus généraux. Un des buts principaux de cette théorie est de pouvoir étendre la dérivée des fonctions dérivables à toutes les distributions, et en particulier de donner un sens aux dérivées des fonctions qui ne sont pas dérivables au sens classique. Nous allons maintenant donner quelques exemples illustrant (là encore, sans la définir rigoureusement) cette notion de dérivée généralisée.

1.2 Notion de dérivée

Etudions le cas de la fonction de Heaviside, notée ici H, égale à 1 pour $x > 0$, à 0 pour $x < 0$ et à $1/2$ en 0. Quel serait le candidat pour cette dérivée? On voit que, pour $x_0 \neq 0$, le taux d'accroissement est nul dès que $h < |x_0|$, et pour $x_0 = 0$, ce taux d'accroissement est $\frac{1}{2|h|}$. Il tend ainsi vers $+\infty$ quand h tend vers 0. De plus, formellement :

$$\int_{-A}^{+A} H'(x)\,dx = H(A) - H(-A) = 1,$$

et donc (en passant à la limite $A \to \infty$),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H'(x)\,dx = 1.$$

Un candidat souhaitable pourrait être la distribution de Dirac.
Les opérations classiques sur cette classe d'objets doivent être encore valables, donc on veut pouvoir calculer les dérivées de la fonction de Heaviside en calculant la dérivée de fonctions qui l'approchent. Un exemple de suite de fonctions approchant H est donné par

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\varepsilon \\ \frac{(\varepsilon+x)^2}{2\varepsilon^2} & \text{si} \quad -\varepsilon \leq x \leq 0 \\ 1 - \frac{(\varepsilon-x)^2}{2\varepsilon^2} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \varepsilon \\ 1 & \text{si} \quad x > \varepsilon \end{cases}$$

Cette fonction admet pour dérivée ϕ_ε. Elle est donc de classe C^1 et de plus, H_ϵ tend vers H au sens L^1 car on trouve que $\int |H_\varepsilon - H| dx = \frac{\varepsilon}{2}$.
On a une convergence simple vers H, mais la convergence au sens de la norme du sup n'est pas assurée. En effet, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |H_\varepsilon(x) - H(x)| = \frac{1}{2}.$$

D'après l'analyse faite précédemment sur la famille $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ on constate que, pour tout χ continue et bornée sur $\mathbb{R}$, on a

$$\text{``}\int_{\mathbb{R}} H'(x)\chi(x)\, dx\text{''} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} (H_\varepsilon)'(x)\chi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(x)\chi(x)dx = \chi(0).$$

On peut donc considérer que la dérivée de H est l'impulsion de Dirac en 0. Cela sera formalisé au chapitre 4.

On peut à présent effectuer la même analyse que celles faite sur les fonctions ϕ_ε sur les fonctions dérivées de ϕ_ε. Nous essayons donc de construire une dérivée de l'impulsion de Dirac en 0. Considérons la fonction ϕ'_ε. C'est une fonction constante par morceaux, valant ε^{-2} pour $-\varepsilon < x < 0$, et $-\varepsilon^{-2}$ lorsque $0 < x < \varepsilon$. Comme précédemment, on calcule $\int_{\mathbb{R}} \phi'_\varepsilon(x)\chi(x)dx$ pour χ continue et bornée sur $\mathbb{R}$. On trouve

$$\int_{\mathbb{R}} \phi'_\varepsilon(x)\chi(x)dx = \int_{-\varepsilon}^{0} \frac{\chi(x)}{\varepsilon^2}dx - \int_0^{\varepsilon} \frac{\chi(x)}{\varepsilon^2}dx = -\int_0^1 \frac{\chi(\varepsilon t) - \chi(-\varepsilon t)}{\varepsilon}dt \quad \text{avec } x = \varepsilon t.$$

Sans hypothèse supplémentaire sur χ, on ne peut pas aller plus loin dans l'étude de la limite lorsque ε tend vers 0. On suppose que χ est dérivable en 0, plus précisément de classe C^1. Alors, une formule de Taylor avec reste intégral donne $\chi(\pm\varepsilon t) = \chi(0) \pm \varepsilon t \int_0^1 \chi'(\pm\varepsilon\theta t)d\theta$, ce qui donne

$$\int_{-\varepsilon}^{0} \frac{\chi(x)}{\varepsilon^2}dx - \int_0^{\varepsilon} \frac{\chi(x)}{\varepsilon^2}dx = -\int_0^1 t\left[\int_0^1 \chi'(\varepsilon\theta t)d\theta + \int_0^1 \chi'(-\varepsilon\theta t)\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}t.$$

Une application de la convergence dominée (Théorème B.1.1) prouve que cette intégrale converge vers

$$-\int_0^1 2t\chi'(0)\mathrm{d}t = -\chi'(0).$$

La dérivée de la mesure de Dirac en 0 devrait donc être définie comme l'opérateur qui a une fonction χ de classe C^1, associe $-\chi'(0)$.
On voit que l'on a dû supposer χ de classe C^1 pour obtenir une limite finie : pour définir δ'_0, on a dû restreindre l'espace des fonctions test aux fonctions C^1. Pour calculer des dérivées d'ordre supérieur, il est naturel de penser qu'il faudra restreindre encore plus cet espace de fonctions, ce que l'on fera effectivement en se limitant à des fonctions test C^∞.

1.3 Le peigne de Dirac

On veut construire un réseau périodique infini de charges ponctuelles placées en tout point entier relatif. C'est un objet naturel dans l'étude du transport électronique dans des réseaux cristallins. La fonction associée simple est alors

$$\Psi^\varepsilon : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_\varepsilon(x-n).$$

Cette fonction, bien qu'elle soit dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, puisque intégrable sur tout compact, n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut en effet vérifier que l'intégrale sur tout compact est équivalente à la taille du compact lorsque celle-ci tend vers $+\infty$.
On vérifie aussi que, pour une fonction continue et bornée χ donnée,

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \int_{m-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \Psi^{\varepsilon}(x)\chi(x)dx = \sum_{p=m}^{p=n} \int_{-1}^{1} (1-|t|)\chi(p+\varepsilon t)dt.$$

Par le théorème de convergence dominée B.1.1,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{m-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \Psi^{\varepsilon}(x)\chi(x)dx = \sum_{p=m}^{p=n} \chi(p).$$

On veut intégrer sur $\mathbb{R}$, donc faire tendre m vers $-\infty$ et n vers $+\infty$. La limite existe lorsque $\sum |\phi(p)| < \infty$. La fonction $\chi : \; x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$ ne vérifie pas ce critère alors que $\chi : \; x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ le vérifie.
Pour donner un sens à la somme infinie définissant le peigne de Dirac, la fonction χ que l'on choisit comme fonction test doit être "suffisamment décroissante à l'infini". Ce critère est automatiquement vérifié si la fonction χ est à support compact. Nous allons donc définir les fonctions test, comme les fonctions de classe C^{∞} à support compact.
Le fait de choisir des fonctions test à support compact nous permettra aussi de considérer comme des distributions des éléments généraux de L^1_{loc}. En effet, si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et $\chi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $\int_{\Omega} f\chi$ est bien défini.

Chapitre 2

Fonctions test

Dans tout ce chapitre, d est un entier ≥ 1, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$, k est un entier naturel ou le symbole ∞ (sauf précision). On désigne par $C^0(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω et par $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k fois dérivables et dont les dérivées k-ièmes sont continues sur Ω. Le but de ce chapitre est de rappeler quelques résultats sur les fonction de classe C^k est d'introduire l'espace vectoriel des fonctions C^∞ à support compact, les "fonctions test" cruciales dans la construction rigoureuse des distributions.

2.1 Notations multi-indicielles

Un multi-indice α est un d-uplet d'entiers, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. On appelle longueur de α l'entier

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d.$$

On définit la factorielle de α par $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$. Si $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on pose aussi

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}.$$

Si α et β sont deux multi-indices, on dit que $\alpha \leq \beta$ lorsque $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots d\}$. On pose

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}.$$

Enfin, on pose :

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d}.$$

Par exemple, si $d = 3$ et $\alpha = (1, 0, 2)$,

$$\alpha! = 2, \quad , x^\alpha = x_1 x_3^2, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^3}{\partial x_1 (\partial x_3)^2}.$$

Remarquons que par le théorème de Schwarz [1], dès que φ est 2 fois dérivables,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}.$$

L'ordre des dérivées partielles dans la définition de ∂^α est donc indifférent.

1. Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), mathématicien allemand. A ne pas confondre avec le mathématicien français du 20ème siècle Laurent Schwartz !

Une fonction φ définie sur Ω est un élément de $C^k(\Omega)$ si pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$, la fonction $\partial^\alpha \varphi$ est dans $C^0(\Omega)$.

Une formule importante est celle de Leibniz. Soient $k \geq 1$, $\varphi, \psi \in C^k(\Omega)$. Alors, pour tout multi-indice α de longueur inférieure ou égale à k,

$$\partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right) \partial^\beta \varphi \cdot \partial^{\alpha-\beta} \psi.$$

Pour vous en souvenir, pensez à la formule du binôme de Newton.

Exercice 2.1.1. *Ecrire la formule de Leibniz quand $d = 3$ et $\alpha = (1, 0, 1)$.*

La formule de Leibniz se démontre par récurrence, à partir de la formule de la dérivée d'un produit qui en est un cas particulier :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi\psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\psi + \varphi\frac{\partial \psi}{\partial x_j}.$$

2.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Voici une formule qui nous sera souvent utile dans la suite. Il faut la connaître au moins à l'ordre 1 ou 2 et à tout ordre pour $d = 1$.

Proposition 2.2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $n \geq 1$ un entier et φ une fonction de classe C^n sur Ω. Soient x et y deux points de Ω tels que le segment $[x, y]$ soit contenu dans Ω. Alors :*

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq n-1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(y)(x-y)^\alpha + \sum_{|\alpha|=n} \frac{n}{\alpha!}(x-y)^\alpha \int_0^1 (1-t)^{n-1} \partial^\alpha \varphi(tx + (1-t)y) \mathrm{d}t.$$

Dans le cas de la dimension 1 on obtient la formule suivante :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(x-y)^k \varphi^{(k)}(y) + (x-y)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n)}(tx + (1-t)y) \mathrm{d}t.$$

En dimension $d \geq 1$ et à l'ordre $n = 1$ on obtient

$$\varphi(x) = \varphi(y) + \sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i) \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tx + (1-t)y) \mathrm{d}t.$$

Ce sont ces deux dernières formules que l'on utilisera le plus souvent dans la suite.

2.3 Fonctions de classe C^∞ à support compact

2.3.1 Support d'une fonction

Définition 2.3.1. *Le support d'une fonction φ définie sur Ω est le sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$ noté* supp φ *et défini par l'une des assertions équivalentes suivantes :*

1. supp $\varphi = \overline{\{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}}$.
2. (supp $\varphi)^c$ *est le plus grand ouvert de Ω où la fonction φ est nulle.*
3. (supp $\varphi)^c$ *est la réunion de tous les ouverts de Ω où la fonction φ est nulle.*

4. $x_0 \notin \text{supp}\ \varphi$ *si et seulement s'il existe un voisinage* V_{x_0} *de* x_0 *tel que :* $\forall x \in V_{x_0},\ \varphi(x) = 0$.

Exercice 2.3.2. *Prouver l'équivalence entre ces quatre assertions.*

On a alors :

1. $(\text{supp}\ \varphi = \emptyset) \Leftrightarrow (\varphi \equiv 0 \text{ dans } \Omega)$,
2. $\text{supp}\ (\varphi\,\psi) \subset \text{supp}\ \varphi \cap \text{supp}\ \psi$,
3. si $\varphi \in C^k(\Omega)$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$, $\text{supp}\ \partial^\alpha \varphi \subset \text{supp}\ \varphi$.

Exercice 2.3.3. *Montrer les* 3 *assertions précédentes.*

Exemple 2.3.4. *Le support de la fonction sinus sur* $\mathbb{R}$ *est* $\mathbb{R}$. *Le support de* $\mathbb{1}_{]0,1[}$ *est* $[0,1]$. *Le support de* $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ *est* $\mathbb{R}$.

2.3.2 Espace des fonctions test

Définition 2.3.5. *Soit* $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. *On note* $C_0^m(\Omega)$ *l'espace vectoriel des fonctions de classe* C^m, *à support compact sur* Ω. *En particulier, l'espace des fonctions test, noté* $C_0^\infty(\Omega)$ *ou* $\mathcal{D}(\Omega)$, *est l'espace vectoriel des fonctions de classe* C^∞, *à support compact sur* Ω.

Si K *est un compact de* Ω, *on note* $C_K^m(\Omega)$ *le sous-espace vectoriel de* $C_0^m(\Omega)$ *formé des fonction à support dans* K.

L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ n'est pas réduit à la fonction nulle, comme nous allons le montrer en construisant une fonction C^∞ à support compact explicite, à partir duquel nous pourrons construire de nombreux autres exemples de fonctions test. Dans cet exemple, $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

Une première fonction à support compact non nulle. On définit la fonction ϕ_0 par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \phi_0(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}) & \text{si} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Cette fonction est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, elle est positive et on a $\text{supp}\ \phi_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq 1\}$. De plus, $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_0(x)\mathrm{d}x > 0$.

Démonstration : Les affirmations sur le support et la positivité stricte de l'intégrale sont évidentes. Pour montrer que $\phi_0(x)$ est C^∞, on commence par remarquer

$$\phi_0(x) = \varphi(|x|^2),$$

où φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{t}{1-t}\right) & \text{si } t < 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}.$$

Puisque $x \mapsto |x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_d^2$ est de classe C^∞, il suffit de montrer, par la formule de composition des fonctions dérivables, que φ est C^∞. Cette fonction est C^∞ sur $]1, +\infty[$ et $]-\infty, 1[$, et vérifie :

$$\forall t > 1,\ \forall n, \quad \varphi^{(n)}(t) = 0.$$

Il reste à montrer qu'elle est C^∞ au voisinage de 0. Par croissance comparéee, on a

$$\lim_{t \to 1^-} \varphi(t) = 0 = \varphi(1) = \lim_{t \to 1^+} \varphi(t),$$

et donc φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On démontre ensuite par récurrence que pour tout n, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall t < 1, \quad \varphi^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(1-t)^{2n}}\varphi(t). \tag{2.1}$$

En effet, c'est vrai pour $n = 0$, avec $P_0 = 1$ et un calcul direct montre que la propriété est héréditaire (avec $P_{n+1}(t) = (1-t)^2 P_n'(t) + (2n-1)P_n(t) - 2ntP_n(t)$). La formule (2.1) avec $n = 1$ montre, en utilisant à nouveau la croissance comparée, que φ' tend vers 0 à gauche et à droite en 1. On en déduit, par un théorème standard d'analyse réelle, que φ est de classe C^1 (et $\varphi'(1) = 0$). En appliquant successivement le même raisonnement à φ'', $\varphi^{(3)}$, etc... on en déduit que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

□

2.3.3 Formule d'intégration par parties

On démontre aisément par récurrence sur $|\alpha|$, à l'aide du théorème de Fubini et de la formule classique d'intégrations par parties sur $\mathbb{R}$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^d,\ \forall \varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega),\ \forall \psi \in C^{|\alpha|}(\Omega), \quad \int_\Omega \partial^\alpha \varphi(x)\psi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \varphi(x)\partial^\alpha\psi(x)\,dx. \tag{2.2}$$

Remarquons qu'il n'y a pas de terme au bord dans cette formule d'intégration par parties, grâce à la compacité du support de φ.

2.3.4 Topologie de $C_K^\infty(\Omega)$ et de $C_0^\infty(\Omega)$

Soit K un compact de Ω et $m \in \mathbb{N}$. Pour $\varphi \in C_K^m(\Omega)$, on note

$$p_{m,K}(\varphi) = \max_{\substack{x\in K \\ |\alpha|\le m}} |\partial^\alpha \varphi(x)|. \tag{2.3}$$

Proposition 2.3.6. *Soit $m \in \mathbb{N}$. L'application $p_{m,K}$ est une norme sur $C_K^m(\Omega)$. L'espace vectoriel $C_K^m(\Omega)$, muni de la norme $p_{m,K}$ est un espace de Banach.*

La démonstration est laissé au lecteur. On pourra commencer par le cas $m = 0$, en utilisant qu'une limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue. Pour le cas général, il peut être utile de faire appel à la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 2.3.7. *Soit σ un réel positif, $m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in C_K^m(\Omega)$ et*

$$g_n(x) = \frac{e^{inx}}{n^\sigma}\varphi(x).$$

A quel condition sur σ et m la suite de fonctions $(g_n)_n$ tend-elle vers 0 lorsque n tend vers l'infini ?

Il serait souhaitable de munir $C_K^\infty(\Omega)$ et $C_0^\infty(\Omega)$ d'une structure d'espace de Banach. On peut montrer que c'est impossible : il n'existe aucune norme qui rend un de ces espaces vectoriels normés complet. Il est en revanche possible de trouver une distance sur $C_K^\infty(\Omega)$ pour en faire un espace métrique complet.

Définition 2.3.8. *Soit K un compact de Ω et φ, ψ deux fonctions de $C_K^\infty(\Omega)$. Notons :*

$$d_K(\varphi,\psi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j}\min(p_{j,K}(\varphi-\psi), 1)$$

Exercice 2.3.9. *Montrer que d_K est une distance sur $C_K^\infty(\Omega)$, et que $C_K^\infty(\Omega)$ muni de la distance d_K est un espace métrique complet.*

Remarque 2.3.10. *La définition de d_K montre que $d_K(\varphi_n, \varphi)$ tend vers 0 si et seulement si pour tout multi-indice α, $(\partial^\alpha \varphi_n)_n$ tend vers $\partial^\alpha \varphi$ uniformément sur K.*

La topologie de $C_0^\infty(\Omega)$ est plus compliquée : on ne peut pas trouver de distance satisfaisante sur cet espace. Il est en revanche possible de définir une notion de convergence des suites qui nous sera suffisante pour définir les distributions.

Définition 2.3.11. *Une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_0^\infty(\Omega)$ tend vers φ dans $C_0^\infty(\Omega)$ lorsque :*

1. *il existe un compact fixe $K \subset \Omega$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$,*
2. $\lim_{n\to\infty} d_K(\varphi, \varphi_n) = 0$.

Notons (cf Remarque 2.3.10) que le deuxième point de la définition signifie que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et toutes les suites $(\partial^\alpha \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément respectivement vers φ et $\partial^\alpha \varphi$ sur K.

Exercice 2.3.12. *Montrer l'unicité de la limite dans la définition 2.3.11 : en d'autres termes, si $(\varphi_n)_n$ est une suite de $C_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers deux fonctions φ et ψ, alors $\varphi = \psi$.*

Exemple 2.3.13. *Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et*

$$\varphi_n = e^{-n}\varphi(x-n).$$

La suite $(\varphi_n)_n$ ne tend pas *vers 0 dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$.*

Exemple 2.3.14. *Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = \phi\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \phi(x).$$

Alors $\varphi_n \to 0$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$. En effet, si $\operatorname{supp} \phi \subset [-M, M]$, alors pour tout n, $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [-M-1, M+1]$. Puis, par le théorème des accroissements finis, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\phi^{(k)}\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \phi^{(k)}(x)\right| \le \frac{1}{n+1}||\phi^{(k+1)}||_\infty \to 0$$

lorsque n tend vers l'infini.

Nous définirons au Chapitre 4 une topologie sur $C^\infty(\Omega)$ (cf définition 4.1.3).

2.3.5 Fonctions "pic" et "plateau"

Fonctions "pic".

Proposition 2.3.15. *Soient $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe une fonction $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$ positive, de support inclus dans $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$ et d'intégrale sur $\mathbb{R}^d$ égale à 1. Une telle fonction ρ est appelée fonction pic sur la boule $B(x_0, \varepsilon)$.*

Démonstration : En effet, considérons la fonctions définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d\ \ \rho_1(x) = \frac{\phi_0(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} \phi_0(y)dy},$$

où ϕ_0 est définie §2.3.2, puis posons

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \rho(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\rho_1\left(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\right).$$

La fonction ρ ainsi définie convient.

□

En dimension $d = 1$ on peut aussi donner une formule explicite pour une fonction pic sur un intervalle quelconque $[a, b]$ non réduit à un singleton. Une fonction C_0^∞ dont le support est $[a, b]$ est

$$\frac{2}{b-a}\phi_0\left(-1 + \frac{2(x-a)}{b-a}\right).$$

En particulier, une fonction dont le support est $[-\varepsilon, \varepsilon]$ est $\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(\frac{x}{\varepsilon})$. On note enfin un résultat que l'on a déjà utilisé au chapitre précédent. Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction continue et bornée χ,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon}\phi_0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\chi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi_0(t)\chi(\varepsilon t)dt$$

d'où la convergence de cette suite, lorsque ε tend vers 0, vers $\chi(0)\int_{-1}^{1}\phi_0(t)dt$. On utilise ici le théorème de convergence dominée B.1.1.

Fonctions "plateau".

On commence par le cas de la dimension $d = 1$. Tout d'abord, il existe une fonction "marche" croissante, de classe C^∞, qui passe de la valeur 0 sur $]-\infty, -1]$ à 1 sur $[1, +\infty[$. On peut prendre par exemple

$$\rho : x \mapsto \frac{\int_{-1}^{x}\phi_0(t)dt}{\int_{-1}^{1}\phi_0(t)dt}.$$

Puis, à partir de cette "marche", on construit une fonction C_0^∞, dont le support compact est $[a, b]$, identiquement égale à 1 sur $[c, d]$, $a < c < d < b$ et comprise entre 0 et 1. Une telle fonction peut être définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ l_0(x) = \begin{cases} \rho(-1 + \frac{2(x-a)}{c-a}) & \text{si} \quad x \le \frac{c+d}{2} \\ \rho(-1 + \frac{2(b-x)}{b-d}) & \text{si} \quad x \ge \frac{c+d}{2}. \end{cases}$$

En effet, sur $[c, \frac{c+d}{2}]$, la fonction l_0 est identiquement égale à 1, ainsi que sur $[\frac{c+d}{2}, d]$, ce qui implique le caractère C^∞ au point $\frac{c+d}{2}$. Cette fonction est appelée "plateau" sur $[c, d]$ supporté par $[a, b]$.

Le résultat persiste en dimension d quelconque.

Proposition 2.3.16. *Soit K un compact de Ω et $\mathcal{O}$ un ouvert tel que $K \subset \mathcal{O}$ et $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$. Il existe alors $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\chi \equiv 1$ sur K, $\chi \equiv 0$ sur $\mathcal{O}^c$ et $0 \le \chi \le 1$.*

On omet la démonstration, qui sera vue en travaux dirigés.

2.4 Densité par troncature et régularisation

Dans cette partie, nous allons montrer que l'espace des fonctions test $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans les espaces L^p. Cela permettra ensuite, lorsque l'on voudra démontrer une propriété des fonctions de ces espaces, de la démontrer tout d'abord pour des fonctions test puis de l'étendre par un argument de densité (et donc par approximation).

2.4.1 Troncature

Nous allons montrer ici que le fait de se restreindre, dans un espace de fonctions d'une régularité donnée, aux fonctions à support compact, n'est pas une restriction importante, dans le sens où on définit alors un sous-espace dense dans l'espace de départ.
Remarquons d'abord que la notion de support n'est pas adaptée aux espaces L^p. Soit en effet f et g deux représentants du même élément de $L^p(\Omega)$, c'est à dire que $f = g$ presque partout sur Ω. Alors on n'a pas forcément $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} g$. Par exemple le support de la fonction constante nulle sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble vide et le support de la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ (où $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels) est l'adhérence de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire $\mathbb{R}$ tout entier. En revanche $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 0$ presque partout, et ces deux fonctions sont donc égales en tant qu'éléments de $L^1(\mathbb{R})$!
La notion de *support essentiel* d'une fonction mesurable est adaptée aux espaces L^p.

Définition 2.4.1. *Soit f une fonction mesurable sur Ω. Soit ω l'ensemble des x de Ω tel qu'il existe un voisinage U de x dans Ω tel que $f = 0$ presque partout sur U. Le* support essentiel *de f est le complémentaire de ω dans Ω.*

Exemple 2.4.2. *Le support essentiel de la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est $\emptyset$. Le support essentiel de la fonction $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$ est $[0, +\infty[$.*

Les démonstrations des propriétés suivantes sont laissées en exercice à la lectrice intéressée :

1. $\operatorname{suppess} f \subset \operatorname{supp} f$.
2. $f = 0$ presque partout sur $\omega = \Omega \setminus \operatorname{suppess} f$.
3. Le support essentiel d'une fonction f est un sous-ensemble fermé de Ω.
4. Si $f = g$ presque partout sur Ω, alors $\operatorname{suppess} f = \operatorname{suppess} g$. Ainsi le support essentiel d'un élément de $L^p(\Omega)$ ou de $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ ne dépend pas du représentant choisi.
5. Soit f une fonction continue sur Ω. Alors $\operatorname{suppess} f = \operatorname{supp} f$.

Proposition 2.4.3. *Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p_c(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) \;:\; \operatorname{suppess} u \text{ est compact}\right\}$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration : On commence par décomposer Ω en $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} K_n$ avec K_n compact et $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$. Il suffit pour cela de poser :

$$K_n = \left\{x \in \Omega \;:\; d\left(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega\right) \geq \frac{1}{2^n} \text{ et } |x| \leq n\right\}.$$

En effet, K_n est par définition un sous ensemble de Ω, et la condition $|x| \leq n$ dans la définition montre qu'il est borné. Par ailleurs, on peut l'écrire comme une intersection de fermés :

$$K_n = \overline{\Omega} \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d \;:\; |x| \leq n\right\} \cap \bigcap_{y \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega} \left\{x \in \mathbb{R}^d \;:\; |x - y| \geq \frac{1}{2^n}\right\}.$$

(Exercice : vérifier cette affirmation). C'est donc un fermé borné, c'est à dire un compact de Ω. La condition $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} K_n$ est facile à vérifier.
On pose alors $u_n = \mathbb{1}_{K_n} u$. On a $\operatorname{suppess} u_n \subset \operatorname{supp} u_n \subset K_n$. Donc $\operatorname{suppess} u_n$ est borné, et comme le support essentiel d'une fonction est toujours fermé, $\operatorname{suppess} u_n$ est compact.
On montre par le théorème de convergence dominée B.1.1 que u_n tend vers u dans $L^p(\Omega)$, c'est à dire que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n(x) - u(x)|^p \, dx = 0. \tag{2.4}$$

En effet $|u_n(x) - u(x)| = |u(x)|\mathbb{1}_{\Omega\setminus K_n} \leq |u(x)|$, donc $|u_n(x) - u(x)|^p \leq |u(x)|^p$ qui est une fonction intégrable indépendante de n. De plus $|u_n(x) - u(x)|^p = \mathbb{1}_{\Omega\setminus K_n}|u(x)|^p$ tend vers 0 pour tout x de Ω (car $\Omega = \bigcup_n K_n$). Le théorème de convergence dominée implique donc bien (2.4).

□

L'hypothèse $p < \infty$ est importante : la proposition 2.4.3 est fausse pour $p = \infty$. La fonction $\mathbb{1}_\Omega$, constante et égale à 1 sur Ω ne peut pas être approchée par des fonctions à support compact. En effet, si φ est à support compact K, alors $1 - \varphi(x) = 1$ pour $x \in \Omega \setminus K$, et donc

$$\|\mathbb{1}_\Omega - \varphi\|_\infty \geq 1.$$

Nous devons maintenant montrer que l'on peut approcher des fonctions à support compact d'une régularité donnée (L^p ou C^k) par des fonctions de classe C^∞. Pour cela nous allons devoir faire des rappels sur la convolution des fonctions classiques. Ces rappels nous seront aussi utiles dans la deuxième partie de ce cours lorsque l'on définira la convolution des distributions.

2.4.2 Produit de convolution

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^d$, muni de la mesure de Lebesgue. On veut définir le **produit de convolution** de deux fonctions f et g par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

Dans le cas de fonctions f et g positives, leur mesurabilité suffit pour que cette formule ait un sens. Sans cette hyptohèse de positivité, on peut encore définir le produit de convolution de f et de g à condition de supposer, en plus de leur mesurabilité, une régularité L^p.

Proposition 2.4.4. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable. Le produit de convolution $f * g$ est donc défini presque partout. De plus $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1 .$$

La même conclusion est valable si l'on remplace $f * g$ par $g * f$. De plus, $f * g = g * f$.

Démonstration : Démontrons le résultat dans les cas $p = 1$ et $p = \infty$. On renvoie à [6] et à [3, théorème VIII.2.3] pour la démonstration générale.

Supposons d'abord $p = \infty$. Fixons $x \in \mathbb{R}^d$. Alors $y \mapsto f(x-y)$ est un élément de L^∞, de norme $\|f\|_\infty$. Donc $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est dans L^1 et :

$$\left|\int f(x-y)g(y)\,dy\right| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

Ceci montre que $f * g$ est une fonction bornée, et donc un élément de L^∞.

Supposons maintenant $p = 1$. Alors par le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\int\int |f(x-y)g(y)|dy\,dx = \int |g(y)| \left(\int |f(x-y)|dx\right) dy.$$

Or (par le changement de variable $y' = x - y$), $\int |f(x-y)|dx$ ne dépend pas de x et vaut $\|f\|_1$. On a ainsi :

$$\int \int |f(x-y)g(y)|dy\,dx = \|f\|_1 \int |g(y)|dy = \|f\|_1\|g\|_1$$

ainsi, par les théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini, $x \mapsto \int f(x-y)g(y)dy$ est défini presque pour tout x et $\int |f * g(x)|\,dx \leq \|f\|_1\|g\|_1$.

□

Exemple 2.4.5. *Le produit de convolution de $\mathbb{1}_{[-1/2,1/2]}$ et d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est la fonction*

$$x \mapsto \int_{-1/2}^{+1/2} f(x-y)dy.$$

Sa valeur en x est la moyenne de f sur un intervalle de longueur 1 centré en x.

La proposition suivante donne des informations sur le support d'une convolution. Pour simplifier la démonstration, on suppose une des fonctions continues. Si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$, on note

$$A + B = \{x + y \ : \ x \in A,\ y \in B\}.$$

Proposition 2.4.6. *Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^d)$, bornée, et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $f * g$ est continue et*

$$\text{supp } f * g \subset \overline{\text{supp } f + \text{suppess } g}.$$

(ici $\overline{A}$ désigne l'adhérence de l'ensemble A)

Démonstration : Le fait que la fonction $f * g$ est continue découle d'une application immédiate du théorème de convergence dominée B.1.1.

Soit $x \in \Omega \setminus (\text{supp } f + \text{suppess } g)$. On écrit

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\text{suppess } g} f(x-y)g(y)\,dy + \int_{(\text{suppess } g)^c} f(x-y)g(y)\,dy. \tag{2.5}$$

On sait que $g = 0$ presque partout sur $(\text{suppess } g)^c$. La deuxième intégrale est donc nulle. Pour calculer la deuxième intégrale, on fait le changement de variable $y' = x - y$. En notant

$$A = \{y' \ : \ x - y' \in \text{suppess } g\},$$

on obtient

$$\int_{\text{suppess } g} f(x-y)g(y)\,dy = \int_A f(y')g(x-y')\,dy'.$$

Si $y' \in A$, $x - y' \in \text{suppess } g$. Puisque $x = x - y' + y'$, l'hypothèse $x \notin \text{supp } f + \text{suppess } g$ impose $y' \notin \text{supp } f$. La restriction de f à A est donc nulle, et la première intégrale du terme de droite de (2.5) est nulle. Finalement, $f * g(x) = 0$. On a montré que $f * g$ est nulle sur le complémentaire de $\text{supp } f + \text{suppess } g$, et donc

$$\text{supp } f * g \subset \overline{\text{supp } f + \text{suppess } g}.$$

□

Exercice 2.4.7. *Calculer le produit de convolution des fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{[0,1]}$ et $\mathbb{1}_{[-1,1]}$. Déterminer son support.*

Remarque 2.4.8. *Si* supp f *ou* suppess g *est compact, on peut montrer que* supp f + suppess g *est fermé et donc* $\overline{\text{supp } f + \text{suppess } g} = \text{supp } f + \text{suppess } g$. *Ce n'est pas le cas en général, par exemple si*

$$\text{supp } f = \bigcup_{n \geq 2} \left[10^n, 10^n + \frac{1}{n}\right], \quad \text{suppess } g = \bigcup_{n \geq 2} \left[-10^n, -10^n + 1 - \frac{2}{n}\right].$$

(Exercice : construire des fonctions f et g dans $C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ vérifiant ces propriétés). Alors 1 *est la limite quand n tend vers l'infini de $10^n - 10^n + 1 - \frac{2}{n}$. C'est donc un élément de l'adhérence de* supp f + suppess g *mais pas de* supp f + suppess g.

La dérivée se comporte bien vis-à-vis du produit de convolution. C'est une conséquence du théorème de dérivation sous le signe $\int$.

Proposition 2.4.9. *Soient $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On suppose que f est de classe C^k et que ses dérivées partielles de tous ordres sont bornées. Alors $f * g$ est de classe C^k et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, tel que $|\alpha| \leq k$,*

$$\partial^\alpha (f * g) = (\partial^\alpha f) * g.$$

Démonstration : Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^d$, la fonction $x \mapsto f(x-y)g(y)$ est dans $C^k(\mathbb{R}^d)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|\partial_x^\alpha (f(x-y)g(y))| = |(\partial^\alpha f)(x-y)g(y)| \leq ||\partial^\alpha f||_\infty \cdot |g(y)|.$$

Comme $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral pour obtenir le résultat.

□

Dans la proposition précédente, $f * g$ hérite de la régularité C^k de la fonction *la plus régulière* f. Il n'y a aucune hypothèse de dérivabilité sur g.

Proposition 2.4.10. *Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, \infty]$ et $f \in L_c^p(\mathbb{R}^d)$. Alors $\varphi * f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Remarquons que, par l'inégalité de Hölder, $L_c^p(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$. La proposition 2.4.10 est donc la conséquence immédiate des deux propositions précédentes.

□

2.4.3 Régularisation

Nous allons utiliser les résultats précédents pour montrer que l'on peut "régulariser" une fonction non régulière en la "convolant" par une fonction régulière. On commence par considérer une fonction "pic" ρ dont le support est inclus dans $B(0,1)$ et dont l'intégrale sur $\mathbb{R}^d$ vaut 1. Pour $\varepsilon > 0$, on pose : $\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-d} \rho(\varepsilon^{-1} \cdot)$. La suite (ρ_ε) est appelée une "approximation de l'unité".

Proposition 2.4.11.

1. *Si $u \in C_0^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq k$, $(\partial^\alpha (\rho_\varepsilon * u))$ converge vers $\partial^\alpha u$ uniformément sur $\mathbb{R}^d$ lorsque $\varepsilon \to 0$.*
2. *Soit $p \in [1, \infty)$. Si $u \in L_c^p(\mathbb{R}^d)$, $(\rho_\varepsilon * u)$ converge vers u dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ lorsque $\varepsilon \to 0$.*

Démonstration : **1.** On suppose $|\alpha| \leq k$. Comme $\int \rho = 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u)(x) - \partial^\alpha u(x) &= (\rho_\varepsilon * \partial^\alpha u)(x) - \partial^\alpha u(x) \\
&= \varepsilon^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \partial^\alpha u(y) \mathrm{d}y - \partial^\alpha u(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) \partial^\alpha u(x - \varepsilon z) \mathrm{d}z - \partial^\alpha u(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)(\partial^\alpha u(x-\varepsilon z) - \partial^\alpha u(x)) \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Or, $\partial^\alpha u$ est continue à support compact car $u \in C_0^k(\mathbb{R}^d)$ donc elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$: $\forall \delta > 0,\ \exists \eta(\alpha, \delta) > 0,\ \forall x, x',\ |x - x'| < \eta(\alpha, \delta) \Rightarrow |\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(x')| \leq \delta$. Fixons $\delta > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \min_{|\alpha| \leq k} \eta(\alpha, \delta) = \eta_\delta$. Alors, $|x - \varepsilon z - x| \leq \varepsilon |z| < \eta_\delta$ sur le support de ρ (qui est inclus dans $B(0,1)$, d'où le $|z| \leq 1$). Alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ |\partial^\alpha(\rho_\varepsilon * u)(x) - \partial^\alpha u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) |\partial^\alpha u(x - \varepsilon z) - \partial^\alpha u(x)| \mathrm{d}z \leq \delta,$$

toujours car $\int \rho = 1$. D'où la convergence uniforme voulue.

2. Soit q l'exposant associé à p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^d,\ |(\rho_\varepsilon * u)(x) - u(x)| &= \left| \int \rho(z) \left(u(x - \varepsilon z) - u(x)\right) \mathrm{d}z \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) |u(x - \varepsilon z) - u(x)| \mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z)^{1/q} \rho(z)^{1/p} |u(x - \varepsilon z) - u(x)| \mathrm{d}z \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) \mathrm{d}z \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) |u(x - \varepsilon z) - u(x)|^p \mathrm{d}z \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) |u(x - \varepsilon z) - u(x)|^p \mathrm{d}z \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

On élève les deux membres à la puissance p et on intègre en x sur $\mathbb{R}^d$. Alors, par Fubini,

$$||\rho_\varepsilon * u(x) - u(x)||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) ||u(\cdot - \varepsilon z) - u||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \mathrm{d}z.$$

Comme $|z| \leq 1$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on $||u(\cdot - \varepsilon z) - u||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$ (résultat classique d'intégration). Comme de plus, $\rho(z)||u(\cdot - \varepsilon z) - u||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq 2^p ||u||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \rho(z)$ et que ρ est intégrable, on peut appliquer le TCD pour obtenir que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) ||u(\cdot - \varepsilon z) - u||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \mathrm{d}z = 0$$

et ainsi $||\rho_\varepsilon * u(x) - u(x)||^p_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$. D'où le résultat voulu.

□

Nous pouvons enfin démontrer le résultat de densité annoncé en introduction.

Théorème 2.4.12. *$C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Démonstration : Par la proposition 2.4.3, il suffit de montrer que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans l'espace $L_c^p(\Omega)$. Soit $u \in L_c^p(\Omega)$. Soit K un compact de Ω tel que $u = 0$ dans K^c. Soit $\tilde{u}$ le prolongement de u par 0 à tout $\mathbb{R}^d$. Alors $\tilde{u} \in L_c^p(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\tilde{u}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \tilde{u}$. Posons enfin $u_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon|_\Omega$. On a supp $\tilde{u}_\varepsilon \subset K_\varepsilon = K + \overline{B(0,\varepsilon)}$. Pour ε assez petit, $K_\varepsilon \subset \Omega$ et c'est un compact. Alors, d'après la proposition 2.4.10, $\tilde{u}_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ et $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. Or, par la proposition 2.4.11, $(\tilde{u}_\varepsilon)$ tend vers $\tilde{u}$ pour la topologie de $L^p(\mathbb{R}^d)$.

□

2.5 Application : Lemme de du Bois-Reymond

Ce résultat, nommé d'après Paul David Gustave du Bois-Reymond [2] aura son importance théorique dans le prochain chapitre.

Lemme 2.5.1. *Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. On suppose que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Alors $f = 0$ presque partout.*

Démonstration : On se donne comme dans §2.4.3 une fonction ρ, C^∞, à support dans $B(0,1)$ et telle que $\int \rho = 1$. On pose $\rho_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-d}\rho(\varepsilon^{-1}y)$. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$. Alors $f\chi \in L_c^1(\mathbb{R}^d)$. Pour tout x de $\mathbb{R}^d$, $y \mapsto \rho_\varepsilon(x-y)\chi(y)$ est un élément de $C_0^\infty(\Omega)$. Puisque :

$$\rho_\varepsilon * (\chi f)(x) = \int \rho_\varepsilon(x-y)\chi(y)f(y)\,dy,$$

l'hypothèse sur f implique $\rho_\varepsilon * (\chi f)(x) = 0$. Par la proposition 2.4.11, cette suite converge vers χf dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. On en déduit que χf est nulle presque partout. La fonction f est nulle presque partout sur tout compact de Ω, donc presque partout sur Ω.

□

2. (1831-1889), mathématicien allemand

Chapitre 3

Distributions sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$

La théorie des distributions a été introduite par Laurent Schwartz en 1945, posant les idées qui étaient déjà en germe chez Sergueï Sobolev dans les années 30. La représentation des phénomènes physiques étendus dans l'espace par des fonctions de plusieurs variables et l'expression des lois physiques en termes d'équations aux dérivées partielles (EDP) ont été un grand progrès dans l'étude de ces phénomènes. Toutefois, cette représentation par une fonction assignant une valeur en chaque point pose au moins deux problèmes d'ordre physique.
Le premier est que les quantités physiques *en un point* n'ont pas de sens. Par exemple, la température est une conséquence du mouvement des molécules. Dans un volume plus petit que le libre parcours moyen d'une molécule, parler de température en un point précis ne signifie donc rien. Pourtant, l'équation de la chaleur classique donne, à l'échelle macroscopique, des résultats qui sont conformes aux expériences.
Le second est qu'une valeur ponctuelle pour une quantité physique est impossible à mesurer avec un appareil de mesure. Ce dernier a nécessairement une certaine étendue spatiale et ne pourra donc jamais fournir une valeur $f(x_0)$ d'une fonction f en un point x_0. Le mieux que l'on puisse obtenir est une moyenne pondérée $\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ où φ caractérise l'appareil de mesure et est supportée au voisinage de x_0 avec une intégrale proche de 1 pour un appareil précis et bien réglé.
Dans ce chapitre nous allons systématiser l'idée qui consiste à ne plus considérer des fonctions définies point par point, mais globalement, par des moyennes locales. Nous allons donc substituer aux fonctions classiques des formes linéaires sur l'espace des fonctions test. Nous avons déjà vu cette idée se dessiner dans le chapitre 1.
Un des buts de cette théorie est d'apporter un sens à des objets abstraits comme l'impulsion de Dirac, mais aussi de pouvoir "dériver" des fonctions qui ne sont pas dérivables, comme par exemple des fonctions L^1 ou L^2 ou seulement continues. Nous verrons comment cela peut nous aider à résoudre des problèmes d'EDP qui n'ont pas a priori de solutions classiques simples.

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

3.1 Définitions et ordre

Nous allons donner deux définitions équivalentes de la notion de distribution, l'une fonctionnelle et théorique dans laquelle la continuité est exprimée topologiquement, une autre effective dans laquelle la continuité est exprimée directement par des estimations.

3.1.1 Définition fonctionnelle

Définition 3.1.1. *Une distribution sur l'ouvert Ω est une forme linéaire $T : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ continue en* 0, i.e. *telle que, pour toute suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C_0^\infty(\Omega)$ qui converge vers 0, $< T, \varphi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.*

On notera souvent $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace $C_0^\infty(\Omega)$, lorsqu'il est considéré comme l'espace des fonctions test pour les distributions. Le symbole $< T, \varphi_n >$ désigne ici un crochet de dualité, il signifie simplement l'action de T sur φ_n : $T(\varphi_n)$. $\mathcal{D}'(\Omega)$ n'est autre que le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est à dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (ce qui explique la notation $\mathcal{D}'(\Omega)$).
La convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ étant une condition très contraignante, la condition de continuité vis-à-vis de cette topologie est une condition assez faible (en effet il y a "peu" de suites convergeant dans $\mathcal{D}(\Omega)$, cette condition de continuité est donc peu contraignante). En conséquence, l'espace des distributions est un espace très gros.
Cette définition abstraite des distributions pourra être utilisée pour des questions théoriques, mais pour montrer en pratique qu'une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution, nous lui préférerons la définition équivalente qui suit.

3.1.2 Définition par l'ordre

Soit $\varphi \in C_0^m(\Omega)$. On rappelle la notation (cf §2.3.4) :

$$p_{m,K}(\varphi) = \max_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leq m}} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

On notera

$$p_m(\varphi) = \max_{\substack{x\in \Omega\\ |\alpha|\leq m}} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Remarquons que si $\varphi \in C_K^m(\Omega)$, on a $p_m(\varphi) = p_{m,K}(\varphi)$.

Proposition 3.1.2. *Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution sur Ω si et seulement si, pour tout compact K de Ω, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C_{K,m} > 0$ tels que, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que* supp $\varphi \subset K$,

$$| < T, \varphi > | \leq C_{K,m} p_m(\varphi).$$

Démonstration : Supposons que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ sur lequel :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall C > 0, \exists \varphi \in C_K^\infty(\Omega),\ | < T, \varphi > | > C p_m(\varphi).$$

Prenons, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $C = m$. Il existe alors $\varphi_m \in C_K^\infty(\Omega)$, $| < T, \varphi_m > | > m p_m(\varphi_m)$. Posons $\tilde{\varphi}_m = \frac{\varphi_m}{< T, \varphi_m >}$. Alors, $< T, \tilde{\varphi}_m >= 1$ et supp $\tilde{\varphi}_m \subset K$. De plus,

$$p_m(\tilde{\varphi}_m) = \frac{p_m(\varphi_m)}{< T, \varphi_m >} < \frac{1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, $\forall m \geq k,\ p_k(\tilde{\varphi}_m) \leq p_m(\tilde{\varphi}_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Cela signifie exactement que la suite $(\tilde{\varphi}_m)$ tend vers 0 dans $C_0^\infty(\Omega)$. Or, $< T, \tilde{\varphi}_m >= 1$ ne tend pas vers 0 ce qui contredit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Montrons la réciproque. Soit (φ_n) une suite qui converge vers 0 dans $C_0^\infty(\Omega)$. Soit K un compact qui contient tous les supp φ_n. Par définition de la convergence dans $C_0^\infty(\Omega)$ on a, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $p_m(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Alors : $| < T, \varphi_n > | \leq C_{K,m} p_m(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

□

Cette caractérisation des distributions sera constamment utilisée par la suite. Elle mène aussi directement à la notion d'ordre d'une distribution.

3.1.3 Ordre d'une distribution

Dans la caractérisation d'une distribution donnée par la Proposition 3.1.2, l'entier m dépend a priori du choix du compact K. Si on peut trouver un entier m qui convient pour tous les compacts K de Ω, on dira que la distribution est d'ordre fini.

Définition 3.1.3. *Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution **d'ordre fini au plus m** sur Ω lorsqu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout compact K de Ω, il existe $C_K > 0$ telle que, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\text{supp } \varphi \subset K$,*

$$| < T, \varphi > | \leq C_K \max_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Le plus petit entier m possible est appelé l'ordre de la distribution T.

L'ordre de T est le plus petit nombre de dérivées qu'il nous faut pour contrôler l'action de T sur les fonctions test.
Nous allons maintenant donner quelques exemples de distributions en précisant à chaque fois leur ordre.

3.2 Support d'une distribution

Définition 3.2.1. *Soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ on définit $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$ qui est égale à φ sur ω et à 0 sur $\Omega \setminus \omega$. Alors, la forme linéaire $T|_\omega$ définie sur $\mathcal{D}(\omega)$ par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega), < T|_\omega, \varphi >=< T, \tilde{\varphi} >$$

est une distribution sur ω appelée la restriction de T à ω.

Il est clair par raccordement, puisque $\text{supp } \varphi \subset \omega \subset \Omega$ est un compact, que $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$. Donc la définition est bien posée.

Définition 3.2.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $\omega \subset \Omega$ un ouvert. On dit que T est nulle dans ω si $T|_\omega = 0$.*

On a alors un résultat de passage du local au global pour cette notion de nullité locale d'une distribution.

Lemme 3.2.3. *Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de Ω et soit ω leur réunion. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que pour tout $i \in I$, $T|_{\omega_i} = 0$. Alors $T|_\omega = 0$.*

Démonstration : On doit montrer que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, $< T, \varphi >= 0$. Soit donc $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$ et soit $K = \text{supp } \varphi$. Comme $K \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$, on peut extraire de ce recouvrement ouvert de K un sous-recouvrement fini indicé par $J \subset I$ fini (propriété de Borel-Lebesgue). Soit alors $(\chi_i)_{i \in J}$ une partition de l'unité relative au recouvrement $(\omega_i)_{i \in J}$ de K (donnée par le lemme C.0.1). Alors pour tout $i \in J$, $\chi_i \in C_0^\infty(\omega_i)$ et $\sum_{i \in J} \chi_i(x) = 1$ pour $x \in K$. Comme φ est à support dans K, on a $\varphi = \sum_{i \in J} \chi_i \varphi$ et ainsi

$$< T, \varphi >= \sum_{i \in J} < T, \chi_i \varphi > .$$

Or, pour tout $i \in J$, $\chi_i \varphi \in C_0^\infty(\omega_i)$ et $T|_{\omega_i} = 0$, donc $< T, \chi_i \varphi >= 0$ et $< T, \varphi >= 0$.

□

Définition 3.2.4. *Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on appelle support de T, noté* supp T*, le complémentaire de la réunion de tous les ouverts de Ω où T est nulle.*

Le lemme 3.2.3 nous montre que toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est nulle sur $(\text{supp } T)^c$, c'est à dire que si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sont telles que supp $T \cap$ supp $\varphi = \emptyset$ alors $< T, \varphi >= 0$. De plus, $(\text{supp } T)^c$ est le plus grand ouvert avec cette propriété. Ici, *plus grand* est à prendre au sens de l'inclusion : si ω est un ouvert de Ω tel que T est nulle sur ω, alors $\omega \subset (\text{supp } T)^c$.

Remarque. Comme complémentaire d'un ouvert, supp T **est toujours un fermé**.

En traduisant la définition, on peut écrire les assertions suivantes :

1. $x_0 \notin \text{supp } T \Leftrightarrow \exists V_{x_0}$, un voisinage ouvert de x_0 tel que : $\forall \varphi \in C_0^\infty(V_{x_0}),\ < T, \varphi >= 0$.
2. supp $T = \{x \in \Omega \mid T \text{ nulle au voisinage de } x\}^c$.
3. si $x_0 \in \text{supp } T$, alors pour tout voisinage V_{x_0} de x_0 dans Ω, il existe $\varphi \in C_0^\infty(V_{x_0})$, tel que $< T, \varphi > \neq 0$.
4. Si F est un fermé de Ω, supp $T \subset F \Leftrightarrow T = 0$ dans F^c.

Nous avons aussi le résultat suivant, utile en pratique.

Proposition 3.2.5. *Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$,* supp $T = \emptyset \Leftrightarrow T = 0$.

Démonstration : Si $T = 0$ il est clair par définition que supp $T = \emptyset$. Réciproquement, si supp $T = \emptyset$, alors T est nulle sur $\emptyset^c$, et donc sur Ω.

□

La proposition 3.2.5 a pour corollaire un principe de localisation.

Corollaire 3.2.6. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On suppose que T est localement une fonction C^k pour $0 \leq k \leq \infty$,* i.e.

$$\forall x \in \Omega,\ \exists \omega_x \text{ ouvert },\ x \in \omega_x \text{ et } \exists f_x \in C^k(\omega_x),\ T|_{\omega_x} = T_{f_x}.$$

Alors, il existe $f \in C^k(\Omega)$ telle que $T = T_f$.

Démonstration : En effet, comme $\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} \omega_x$, on peut choisir pour tout $x \in \Omega$, $f_x \in C^k(\omega_x)$ telle que $T|_{\omega_x} = T_{f_x}$. Or, sur $\omega_x \cap \omega_y$, $f_x = f_y$ car $T_{f_x}|_{\omega_x \cap \omega_y} = T|_{\omega_x \cap \omega_y} = T_{f_y}|_{\omega_x \cap \omega_y}$, puis on utilise la continuité de f_x et f_y pour en déduire $f_x = f_y$ partout et pas uniquement presque partout sur $\omega_x \cap \omega_y$.

Alors, on peut poser légitimement $f : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = f_x(z)$ si $z \in \omega_x$. La fonction f est de classe C^k sur Ω car elle est C^k au voisinage de tout $x \in \Omega$ et on a : $\forall x \in \Omega,\ (T - T_f)|_{\omega_x} = 0$. Par définition du support, supp $(T - T_f) = \emptyset$, donc par la proposition précédente, $T = T_f$.

□

3.3 Premiers exemples

3.3.1 Distribution associée à une fonction L^1_{loc}

Une des premières choses à vérifier est que la théorie des distributions généralise bien la théorie des fonctions classiques, typiquement des fonctions localement intégrables. On va donc montrer comment l'espace vectoriel des fonctions $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ s'injecte dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Proposition 3.3.1. *Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. On peut lui associer une distribution, notée T_f, telle que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), < T_f, \varphi >= \int_\Omega f\varphi \mathrm{d}x.$$

Cette distribution est d'ordre 0*. De plus* $\mathrm{supp}\ T_f = \mathrm{suppess}\ f$.

Démonstration : Tout d'abord, on vérifie que, comme f est $L^1_{loc}(\Omega)$, sa restriction à tout compact est L^1. Ainsi, sur le support de $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, elle est L^1. Comme φ est bornée, car continue sur le compact où elle est supportée, on en déduit que $f\varphi$ est L^1, et que

$$\left| \int_\Omega f\varphi \mathrm{d}x \right| \le \max_{x \in \mathrm{supp}\ \varphi} |\varphi(x)| \int_{\mathrm{supp}\ \varphi} |f| \mathrm{d}x.$$

La forme linéaire $\varphi \to \int_\Omega f\varphi dx$ est donc bien une distribution, qui plus est d'ordre au plus 0, donc d'ordre 0.

Calculons $\mathrm{supp}\ T_f$. Posons $U = (\mathrm{supp}\ Tf)^c$, et $V = (\mathrm{suppess}\ f)^c$. Par définition du support essentielle, f est nulle presque partout sur V. Donc

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(V), \quad < T_f, \varphi >= \int_\Omega \varphi(x) f(x) \mathrm{d}x = 0,$$

ce qui montre que φ est nulle sur V, et donc $V \subset U$.

Réciproquement, on a, par définition du support de T_f,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(U), \quad \int_\Omega \varphi(x) f(x) \mathrm{d}x =< T_f, \varphi >= 0.$$

Par le lemme de du Bois-Reymond (lemme 2.5.1), f est nulle presque partout sur U, et donc $U \subset V$. On a donc $U = V$, et par passage au complémentaire, $\mathrm{suppess}\ f = \mathrm{supp}\ T_f$.

□

Par ailleurs, le lemme de du Bois-Reymond nous permet d'identifier T_f à la fonction f de manière unique. D'après ce lemme, l'application $f \mapsto T_f$ est une injection de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$: si $T_f = T_g$, alors $f = g$ presque partout. Dans la suite nous ferons donc parfois l'abus de langage qui consiste à identifier T_f à f. Nous écrirons par exemple "soit f la distribution...". Remarquons aussi que si $T_f = T_g$ et f et g sont continues, alors $f = g$.

Exemple 3.3.2. *Soit f une fonction continue sur Ω. Alors* $\mathrm{supp}\ T_f = \mathrm{supp}\ f$ *où* $\mathrm{supp}\ f$ *est le support au sens classique de la fonction continue f. En effet* $\mathrm{supp}\ T_f = \mathrm{suppess}\ f$, *et puisque f est continue,* $\mathrm{suppess}\ f = \mathrm{supp}\ f$.

Exemple 3.3.3. *Le support de $\mathbf{1}_\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$, mais* $\mathrm{supp}\ T_{\mathbf{1}_\mathbb{Q}} = \mathrm{suppess}\ \mathbb{1}_\mathbb{Q} = \emptyset$ *car $\mathbb{Q}$ est dénombrable, et donc de mesure nulle.*

3.3.2 Distribution de Dirac

Nous avons déjà rencontré cette distribution au chapitre 1. Nous allons maintenant en donner sa définition précise.

Définition 3.3.4. *Soit $a \in \Omega$. La forme linéaire $\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ < \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$$

est une distribution sur Ω, d'ordre 0, appelée mesure *(ou* masse, *ou* impulsion*) de Dirac en a. De plus,* $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$.

Démonstration : Soit K un compact de Ω et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \subset K$. Alors, $| < \delta_a, \varphi > | \leq 1 \cdot ||\varphi||_\infty$. Donc δ_a est une distribution d'ordre au plus 0 donc 0 sur Ω.
Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{a\})$, on a $< \delta_a, \varphi >= \varphi(a) = 0$, donc $\operatorname{supp} \delta_a \subset \{a\}$. De plus, δ_a n'est pas la distribution nulle, donc $\operatorname{supp} \delta_a \neq \emptyset$, ce qui montre $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$.

□

La distribution de Dirac est un nouvel objet de la théorie des distributions. En effet, on peut montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que $\delta_a = T_f$. Si cela était le cas, en fixant un compact $K \subset \Omega$, on aurait :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{supp} \varphi \subset K,\ < \delta_a, \varphi >= \varphi(a) = \int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Alors, si $a \notin \operatorname{supp} \varphi$, $\int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Donc, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{a\})$, $\int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. Par le lemme de du Bois-Reymond, $f = 0$ pp sur $\Omega \setminus \{a\}$, donc sur Ω. Mais alors, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\int_K f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_K 0 \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x = 0 = \varphi(a)$. En choisissant φ telle que $\varphi(a) \neq 0$ on aboutit à une contradiction.

3.3.3 Distribution de Dirac dérivée

Nous pouvons aussi définir sur le modèle de la distribution de Dirac une distribution d'ordre fini de n'importe quel ordre. Soient $a \in \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Posons, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$< T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \varphi(a).$$

Montrons que T ainsi définie est une distribution d'ordre exactement $|\alpha|$. Tout d'abord, il est clair que c'est bien une distribution d'ordre au plus $|\alpha|$. En effet, si K est un compact de Ω, on a

$$| < T, \varphi > | = |\partial^\alpha \varphi(a)| \leq ||\partial^\alpha \varphi||_\infty = \max_{x \in K} |(\partial^\alpha \varphi)(x)|.$$

Soit $k < |\alpha|$. Montrons que T n'est pas d'ordre k. On raisonne par l'absurde. Supposons que, pour tout compact K de Ω, il existe $C_K > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{supp} \varphi \subset K,\ |\partial^\alpha \varphi(a)| \leq C_K \max_{|\beta| \leq k} ||\partial^\beta \varphi||_\infty. \tag{3.1}$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, 2\varepsilon) \subset \Omega$, et prenons comme compact $K = \overline{B(a, \varepsilon)}$. Fixons $\psi_0 \in C_0^\infty(B(0, \varepsilon))$ telle que $\psi_0(x) = 1$ pour $|x| \leq \varepsilon/2$. Posons alors

$$\psi(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha!}\psi_0(x).$$

Par la formule de Leibniz, on a $\partial^\alpha \psi(0) = \psi_0(0) = 1$. Posons enfin $\varphi(x) = \psi(\lambda(x-a))$ où $\lambda \geq 1$. Comme supp $\varphi \subset B(a, \frac{\varepsilon}{\lambda}) \subset B(a, \varepsilon) \subset K$, on a bien supp $\varphi \subset K$. De plus, $< T, \varphi >= \partial^\alpha \varphi(a) = \lambda^{|\alpha|}\partial^\alpha \psi(0) = \lambda^{|\alpha|}$. Pour $|\beta| \leq k$,

$$|\partial^\beta \varphi(x)| = \lambda^{|\beta|}|\partial^\beta \psi(\lambda(x-a))| \leq \lambda^k ||\partial^\beta \psi||_\infty.$$

Alors, pour tout $\lambda \geq 1$, on devrait avoir, par (3.1)

$$\lambda^{|\alpha|-k} \leq C_K \max_{|\beta|\leq k} ||\partial^\beta \psi||_\infty < +\infty.$$

On aboutit à une contradiction en faisant tendre λ vers $+\infty$ puisque $|\alpha| - k \geq 1$. Donc T ne peut pas être d'ordre $k < |\alpha|$, donc T est d'ordre exactement $|\alpha|$.

3.3.4 La valeur principale de $\frac{1}{x}$

La fonction inverse, $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, on ne peut donc pas définir à partir de cette fonction une distribution comme on l'a fait auparavant. Cependant, en prenant garde à éviter la singularité en 0 et en effectuant une intégration symétrique par rapport à 0, on va tout de même pouvoir associer une distribution à f.

Définition 3.3.5. *Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On pose*

$$\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Alors vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ *est une distribution sur* $\mathbb{R}$ *d'ordre exactement* 1. *On a également* supp vp $\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R}$.

Démonstration : Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et supposons que $K \subset [-R, R]$ pour R un réel positif. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que supp $\varphi \subset K$. Alors,

$$\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon<|x|\leq R} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x.$$

Pour "annuler" la singularité en 0, l'idée est de faire un développement de Taylor de φ en 0. Par la formule de Taylor avec reste intégral, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x),\ \text{avec } \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)\mathrm{d}t,\ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } |\psi(x)| \leq ||\varphi'||_\infty.$$

On écrit alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\varepsilon<|x|\leq a} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x = \varphi(0) \int_{\varepsilon<|x|\leq R} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon<|x|\leq R} \psi(x)\mathrm{d}x := I_1 + I_2.$$

Par imparité de la fonction f et symétrie par rapport à 0 du domaine d'intégration, l'intégrale I_1 est nulle. Dans l'intégrale I_2, la fonction ψ étant continue en 0, on peut appliquer le TCD pour obtenir que la limite lorsque ε tend vers 0 de I_2 existe et vaut $\int_{|x|\leq R} \psi(x)\mathrm{d}x$. La définition de vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ est donc justifiée, la limite existe et on a :

$$\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle = \int_{|x|\leq R} \psi(x)\mathrm{d}x.$$

De plus,

$$\left|\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right| \leq 2R \sup_{-R\leq|x|\leq R} |\psi(x)| \leq 2R \sup_{x\in K} |\varphi'(x)|.$$

On en déduit que vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution d'ordre au plus 1. Il nous reste à justifier qu'elle ne peut pas être d'ordre 0. Si elle était d'ordre 0 on aurait l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \text{supp}\ \varphi \subset [0,2],\ \left|\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right| \leq C||\varphi||_\infty.$$

Pour $n \geq 1$, on considère une fonction plateau qui vaut 1 sur le compact $[\frac{1}{n}, 1]$ et qui est nulle hors de l'ouvert $]\frac{1}{2n}, 2[$. Alors, $||\varphi_n||_\infty = 1$ et, pour $\varepsilon \leq \frac{1}{2n}$, on a (par positivité de φ_n)

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2n}}^{2} \frac{\varphi_n(x)}{x} \mathrm{d}x \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\varphi_n(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log n.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$\log n \leq \left|\left\langle \text{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle\right| \leq C||\varphi_n||_\infty = C.$$

D'où la contradiction lorsque $n \to \infty$.
Soit $x_0 \neq 0$. Supposons que $x_0 > 0$, la démonstration est la même pour $x_0 < 0$. Soit ρ_{x_0} une fonction pic centrée en x_0, et supportée sur $[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}]$. On a, pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{x_0}{2}$,

$$\int_{x \geq \varepsilon} \frac{\rho_{x_0}(x)}{x} \mathrm{d}x = \int_{\frac{x_0}{2}}^{\frac{3x_0}{2}} \frac{\rho_{x_0}(x)}{x} \mathrm{d}x > 0.$$

D'où, $<$ vp $\left(\frac{1}{x}\right), \rho_{x_0} > \neq 0$ et $x_0 \in$ supp vp $\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc $\mathbb{R}^* \subset$ supp vp $\left(\frac{1}{x}\right) \subset \mathbb{R}$. Comme le support d'une distribution est un fermé, on a nécessairement supp vp $\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R}$.

□

Comme vp $\left(\frac{1}{x}\right)$ est d'ordre 1 on en déduit en particulier qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ telle que vp $\left(\frac{1}{x}\right) = T_f$.
Cette distribution apparaîtra à nouveau plus loin dans le cours et en TDs. Tout comme la distribution de Dirac, elle constitue un des premiers exemples d'objets nouveaux introduits par la théorie des distributions.

3.3.5 Partie finie de x^a

On cherche à définir une distribution qui coïncide avec x^a pour $-2 < a < -1$ et $x > 0$. On vérifie que

$$\int_\varepsilon^R x^a \varphi(x) \mathrm{d}x = \int_\varepsilon^R x^a \varphi(0) \mathrm{d}x + \int_\varepsilon^R x^{a+1} \varphi'(0) \mathrm{d}x + ...$$

(sans préciser le reste de Taylor). Le premier terme vaut $\frac{R^{a+1}}{a+1} - \frac{\varepsilon^{a+1}}{a+1}$, qui tend vers $+\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Il s'agit de la partie infinie de x^a. Plus précisément, on a l'égalité, valable pour φ à support compact et $R \notin \text{supp}\varphi$:

$$\int_\varepsilon^R x^a \varphi(x) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\varphi(x)\right]_\varepsilon^R - \int_\varepsilon^R \frac{x^{a+1}}{a+1}\varphi'(x) \mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon^{a+1}}{a+1}\varphi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^R \frac{x^{a+1}}{a+1}\varphi'(x) \mathrm{d}x.$$

La fonction $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ est, quant à elle, intégrable car $a + 1 > -1$, donc définit une distribution. On voit donc apparaitre la partie finie.

Définition 3.3.6. *Soit $a \in]-2,-1[$. La partie finie de x^a, notée $\mathrm{Pf}(x^a)$ est la distribution définie par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ <\mathrm{Pf}(x^a),\varphi>=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty x^a\varphi(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon^{a+1}}{a+1}\varphi(0)\right)=-\int_0^\infty \frac{x^{a+1}}{a+1}\varphi'(x)\mathrm{d}x. \quad (3.2)$$

On peut plus généralement définir de même $\mathrm{Pf}(x^a)$ lorsque a est un réel <-1, non-entier :

Définition 3.3.7. *Soit $a<-1$ tel que $a \notin \mathbb{Z}$. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $a \in]-n-1,-n[$. La partie finie de x^a ($x>0$) est la distribution définie par :*

$$<\mathrm{Pf}(x^a),\varphi>=(-1)^n\int_0^\infty \frac{x^{a+n}}{(a+1)...(a+n)}\varphi^{(n)}(x)\mathrm{d}x.$$

On peut aussi exprimer la partie finie comme en (3.2), en retranchant la partie infinie obtenue en écrivant le développement de Taylor de φ à un ordre dépendant de a. Ainsi, lorsque $-n-1<a<-n$, $n\geq 1$, on écrit

$$\varphi(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^j}{j!}\varphi^{(j)}(0)+x^n\psi_n(x),$$

où $\psi_n\in C^\infty$ et on calcule ainsi la limite, lorsque $\varepsilon\to 0$, de

$$\int_\varepsilon^{+\infty}x^a\varphi(x)\mathrm{d}x+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\varepsilon^{a+j+1}}{(j+a+1)j!}\varphi^{(j)}(0),$$

qui est exactement $<\mathrm{Pf}(x^a),\varphi>$, où Pf est la partie finie donnée par la définition 3.3.7.
On peut également définir une partie finie lorsque a est entier, mais il faut pour cela faire intervenir, dans le développement de Taylor précédent, un terme en $\log\varepsilon$. Par exemple

$$\left\langle \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{x}\right),\varphi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x+\varphi(\varepsilon)\log(\varepsilon)\right).$$

Lorsque a est entier on peut également définir une valeur principale, par analogie à la valeur principale de $1/x$, en passant à la limite dans une intégrale symétrique par rapport à l'origine. Ainsi, la valeur principale de $1/x^2$ est,

$$\left\langle \mathrm{vp}\left(x^{-2}\right),\varphi\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{|x|>\varepsilon}x^{-2}\varphi(x)\mathrm{d}x-\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right).$$

Nous verrons en travaux dirigés la définition de la partie finie de $|x|^a$ en dimension $d\geq 2$.

3.3.6 Un exemple de distribution d'ordre infini

Soit T la forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\ <T,\varphi>=\sum_{j=0}^{+\infty}\varphi^{(j)}(j).$$

Remarquons que φ étant à support compact, la somme précédente est en fait finie. Alors, T est une distribution sur $\mathbb{R}$ d'ordre infini. On peut reprendre en l'adaptant légèrement la preuve donnée pour la distribution de Dirac dérivée.
Soit $[-R,R]\subset\mathbb{R}$ et soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, supp $\varphi\subset[-R,R]$. Posons $p_0=E(R)+1$, où $E(R)$ est la partie entière de R. On a :

$$|<T,\varphi>|=\left|\sum_{j=0}^{+\infty}\varphi^{(j)}(j)\right|=\left|\sum_{j=0}^{p_0}\varphi^{(j)}(j)\right|\leq\sum_{j=0}^{p_0}||\varphi^{(j)}||_\infty.$$

Donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Supposons par l'absurde que T est d'ordre fini m. Soit $\psi_0 \in C_0^\infty(]-1/2, 1/2[)$, égale à 1 sur $[-1/4, 1/4]$ et positive. Soit $\lambda > 1$. Posons $\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\psi_0(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \psi(\lambda(x-(m+1)))$. On considère le compact $K = [m+1/2, m+3/2] \subset \mathbb{R}$. Comme $\lambda > 1$, φ est à support dans K et elle est C^∞.
D'autre part, par la formule de Leibniz, on a : $\psi^{(m+1)}(0) = \psi_0(0) = 1$. Puis, comme supp $\varphi \subset K$, on a $< T, \varphi >= \varphi^{(m+1)}(m+1) = \lambda^{m+1}\psi^{(m+1)}(0) = \lambda^{m+1}$. D'autre part, pour $j \leq m$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty.$$

Or, T est supposée d'ordre m, donc pour $K = [m+1/2, m+3/2]$, il existe $C_K > 0$ telle que

$$| < T, \varphi > | \leq C_K \sum_{j=0}^{m} ||\varphi^{(j)}||_\infty,$$

soit ici :

$$\lambda^{m+1} \leq C_K \sum_{j=0}^{m} \lambda^j ||\psi^{(j)}||_\infty \leq C_K \lambda^m,$$

ce qui conduit à une contradiction lorsque λ tend vers l'infini. Donc T ne peut être d'ordre fini.

3.4 Convergence des suites de distributions

Nous allons voir que les suites de distributions étant des suites d'applications linéaires continues, elles se comportent de manière très “simple”. Cela est principalement dû au théorème de Banach-Steinhaus qui est un résultat d'uniformisation des bornes sur les familles de formes linéaires continues sur un espace de Banach (voir [6], Chapitre 17). Commençons par donner la définition de la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Définition 3.4.1. *On dit qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distributions sur Ω converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,*

$$\lim_{n\to\infty} < T_n, \varphi >=< T, \varphi > .$$

Exemple 3.4.2. *La suite $(\delta_{1/n})_n$ tend vers la distribution δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. La suite $(e^n\delta_n)_n$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

Exemple 3.4.3. *La suite de distributions $(T_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1,\ T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$, converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $\varphi \mapsto 2\varphi'(0)$. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on peut écrire $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu)\mathrm{d}u$. Alors,*

$$< T_n, \varphi >= n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = \psi\left(\frac{1}{n}\right) + \psi\left(-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\psi(0) = 2\varphi'(0).$$

D'où le résultat.

Exemple 3.4.4. *La suite $(T_{e^{in\cdot}})_{n\geq 0}$ converge vers la distribution nulle dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Il s'agit juste du lemme de Riemann-Lebesgue.*

Proposition 3.4.5. *La convergence dans $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration : Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions dans $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ qui converge vers f dans $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Soit q tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Soit $K\subset\Omega$ un compact et soit $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, supp $\varphi\subset K$. Par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}|<T_{f_n},\varphi>-<T_f,\varphi>| &= |<T_{f_n}-T_f,\varphi>|\leq\int_K|f_n(x)-f(x)|\cdot|\varphi(x)|\mathrm{d}x\\ &\leq ||f_n-f||_{L^p(K)}||\varphi||_{L^q(K)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.\end{aligned}$$

□

Exemple 3.4.6. *La convergence presque partout n'implique pas la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. En effet, considérons la suite de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ définie par $f_n : x\mapsto\sqrt{n}e^{-nx^2}$. Alors, pour tout $x\neq 0$, $f_n(x)\to 0$, mais la suite $(T_{f_n})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ vers $\sqrt{\pi}\delta_0$ et non pas vers la distribution nulle. En effet, si $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, on a par le TCD,*

$$<f_n,\varphi>=\sqrt{n}\int_{\mathbb{R}}e^{-nx^2}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)\mathrm{d}y\xrightarrow[n\to\infty]{}\sqrt{\pi}\varphi(0)=<\sqrt{\pi}\delta_0,\varphi>.$$

On a le théorème suivant dont la démonstration (difficile et basée sur Banach-Steinhaus) est admise ici (voir [1, C.3.4, p245] ou [8, p58]).

Théorème 3.4.7 (Admis)**.** *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions telle que, pour toute $\varphi\in C^\infty_0(\Omega)$, la suite $(<T_n,\varphi>)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans $\mathbb{C}$. Alors la forme linéaire T définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par*

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega),\ <T,\varphi>=\lim_{n\to+\infty}<T_n,\varphi>$$

est une distribution sur Ω. De plus, pour tout compact $K\subset\Omega$, il existe $m\in\mathbb{N}$ et $C>0$ tels que,

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega),\ \text{supp}\ \varphi\subset K,\ \sup_{n\in\mathbb{N}}|<T_n,\varphi>|\leq Cp_m(\varphi).$$

Le point clé ici est le fait que l'on peut trouver une constante $C>0$ et un entier $m\in\mathbb{N}$ indépendants de n. On a aussi le corollaire suivant.

Corollaire 3.4.8. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions qui converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors $<T_n,\varphi_n>\xrightarrow[n\to\infty]{}<T,\varphi>$.*

Démonstration : On écrit

$$<T_n,\varphi_n>-<T,\varphi>=<T_n,\varphi_n-\varphi>+<T_n-T,\varphi>.$$

Le premier terme tend vers 0 grâce au théorème 3.4.7. Le deuxième terme tend vers 0 par la définition de la convergence des distributions.

□

Nous allons montrer au chapitre sur la convolution des distributions que toute distribution est limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ d'une suite de fonctions dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Nous terminons cette section par un résultat d'approximation de la distribution de Dirac en 0 par des fonctions L^1.

Proposition 3.4.9. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions positives dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, dont les supports sont contenus dans des boules centrées à l'origine et de rayon tendant vers 0. Alors*

$$\frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d}f_n\mathrm{d}x}T_{f_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\delta_0\quad dans\quad\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

Démonstration : Soit a_n le rayon de la boule, $a_n \to 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En posant $x = a_n t$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ < T_{f_n}, \varphi >= \int_{|x|\leq a_n} f_n(x)\varphi(x)dx = a_n^d \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)\varphi(a_n t)\mathrm{d}t.$$

On écrit

$$\frac{< T_{f_n}, \varphi >}{\int f_n} - \varphi(0) = \frac{a_n^d \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)(\varphi(a_n t) - \varphi(0))\mathrm{d}t}{a_n^d \int_{|t|\leq 1} f_n(a_n t)\mathrm{d}t}.$$

On utilise ensuite le fait que, pour $a_n < 1$ et $|t| \leq 1$, par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1,

$$|\varphi(a_n t) - \varphi(0)| \leq a_n \max_{|\alpha|=1} \max_{|x|\leq 1} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

pour trouver, lorsque n est assez grand,

$$\left| \frac{< T_{f_n}, \varphi >}{\int f_n} - \varphi(0) \right| \leq a_n \max_{|\alpha|=1} \max_{|x|\leq 1} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

D'où le résultat.

$\square$

Chapitre 4

Opérations sur les distributions

4.1 Multiplication par une fonction C^∞

4.1.1 Majoration de la norme d'un produit de fonctions

On rappelle la définition des normes p_m et $p_{m,K}$ (où K est un compact de Ω) :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad p_{m,K}(\varphi) = \max_{\substack{x\in K \\ |\alpha|\leq m}} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad p_m(\varphi) = \max_{\substack{x\in \Omega \\ |a|\leq m}} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Le lemme suivant nous sera très utile dans la suite de ce cours :

Lemme 4.1.1. *Soit $m \in \mathbb{N}$. Il existe une constante C_m telle que*

$$\forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega), \quad p_m(\varphi\psi) \leq C_m p_m(\varphi) p_m(\psi),$$

et, si K est un compact de Ω,

$$\forall \varphi, \psi \in C^\infty(\Omega), \quad p_{m,K}(\varphi\psi) \leq C_m p_{m,K}(\varphi) p_{m,K}(\psi).$$

Démonstration : La deuxième inégalité découle de la première par troncature de φ et ψ par une fonction plateau valant 1 sur K. Pour montrer la première inégalité, on utilise la formule de Leibniz

$$\partial^\alpha(\varphi\psi) = \sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \partial^\beta \varphi \cdot \partial^{\alpha-\beta}\psi,$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^d$ vérifie $|\alpha| \leq m$. En majorant $|\partial^\beta \varphi|$ par $p_m(\varphi)$ et $|\partial^{\alpha-\beta}\psi|$ par $p_m(\psi)$, on obtient l'inégalité annoncée. On rappelle ici que $\sum_{\beta\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 2^{|\alpha|}$.

□

4.1.2 Multiplication par une fonction C^∞

Définition 4.1.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $a \in C^\infty(\Omega)$. La forme linéaire aT définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), < aT, \varphi >=< T, a\varphi >$$

est une distribution appelée produit de a par T.

Démonstration : Tout d'abord, on a bien $a\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ donc le membre de droite est bien défini. Par ailleurs, il est évident que $\varphi \mapsto < T, a\varphi >$ est une application linéaire. Il reste à vérifier la propriété de continuité dans la définition des distributions.

Soit $K \subset \Omega$ un compact. Il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \; | < T, \varphi > | \leq C p_m(\varphi).$$

Alors, par le lemme 4.1.1,

$$| < aT, \varphi > | = | < T, a\varphi > | \leq C \times C_m \, p_m(a\varphi) \leq C \, p_m(a) p_m(\varphi),$$

ce qui montre que aT est bien une distribution.

□

Nous avons facilement les propriétés suivantes. Pour $a, b \in C^\infty(\Omega)$ et $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$(a+b)T = aT + bT, \quad (ab)T = a(bT), \quad a(S+T) = aS + aT.$$

De plus, la multiplication est une opération continue sur $\mathcal{D}'(\Omega) \times C^\infty(\Omega)$. Pour donner un sens à cette affirmation, on doit définir une topologie sur $C^\infty(\Omega)$, ce que l'on fait à l'aide de suites.

Définition 4.1.3. *Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de $C^\infty(\Omega)$ et $\varphi \in C^\infty(\Omega)$. On dit que la suite $(\varphi_n)_n$ converge vers φ dans $C^\infty(\Omega)$ quand n tend vers ∞ lorsque pour tout compact K de Ω, pour tout $m \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{n\to\infty} p_{m,K}(\varphi - \varphi_n) = 0.$$

En d'autres termes, une suite converge dans C^∞ si et seulement si elle converge uniformément dans tout compact, ainsi que toutes ses dérivées. Ainsi une suite convergente dans $C_0^\infty(\Omega)$ converge vers la même limite dans $C^\infty(\Omega)$. Un autre exemple est la suite $(\varphi_n)_n$, où $\varphi_n(x) = e^n \varphi(x-n)$, et φ est un élément fixé de $C_0^\infty(\mathbb{R})$: cette suite converge vers 0 dans $C^\infty(\mathbb{R})$ (comparer avec l'exemple 2.3.13).

On a alors :

Proposition 4.1.4. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a \in C^\infty(\Omega)$. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers a dans $C^\infty(\Omega)$ et soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Alors*

$$a_n T \xrightarrow[n\to\infty]{} aT, \quad aT_n \xrightarrow[n\to\infty]{} aT \quad \text{et} \quad a_n T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} aT \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Démonstration : Bien entendu, il suffit de montrer le troisième point. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Posons pour tout n, $\psi_n = a_n \varphi$. Alors, $\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ par la formule de Leibniz, donc

$$< a_n T_n, \varphi > = < T_n, \psi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} < T, a\varphi > = < aT, \varphi > .$$

Nous avons utilisé ici le corollaire 3.4.8.

□

Proposition 4.1.5. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $a \in C^\infty(\Omega)$. Alors :* supp $(aT) \subset$ supp $a \cap$ supp T.

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty((\text{supp } a)^c)$. Alors $a\varphi = 0$ et donc $\langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle = 0$. La distribution aT est donc nulle sur $(\text{supp } a)^c$, ce qui montre

$$\text{supp } (aT) \subset \text{supp } a.$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty((\text{supp } T)^c)$. Alors $a\varphi \in C_0^\infty((\text{supp } T)^c)$, et donc, par définition de supp T, $\langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle = 0$. Ainsi, aT est nulle sur $(\text{supp } T)^c$, ce qui montre

$$\text{supp } (aT) \subset \text{supp } T.$$

□

Exemple 4.1.6. *Si $a \in C^\infty(\Omega)$ et $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, alors $aT_f = T_{af}$.*

Exemple 4.1.7. *Si $a \in C^\infty(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$, alors $a\delta_{x_0} = a(x_0)\delta_{x_0}$. En particulier dans $\mathbb{R}$, $x\delta_0 = 0$. La vérification est ici immédiate.*

Exemple 4.1.8. *On a : $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. En effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,*

$$\left\langle x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi\right\rangle = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), x\varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{x\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\mathrm{d}x =< 1, \varphi >,$$

par intégrabilité de la fonction φ.

Exemple 4.1.9. *Soit $-2 < a < -1$. Alors $x\mathrm{Pf}(x^a) = x^{a+1}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$. En effet, si l'on pose $\psi(x) = x\varphi(x)$,*

$$< x\mathrm{Pf}(x^a), \varphi >=< \mathrm{Pf}(x^a), \psi >= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty x^a\psi(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon^{a+1}}{a+1}\psi(0)\right).$$

Or $\psi(0) = 0$, donc

$$< x\mathrm{Pf}(x^a), \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty x^{a+1}\varphi(x)\mathrm{d}x\right) = \int_0^\infty x^{a+1}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque. On ne peut pas définir un produit raisonnable entre deux distributions quelconques. Par exemple, une multiplication basique du type "$< TS, \varphi >=< T, \varphi > \cdot < S, \varphi >$" ne définit même pas une forme linéaire.
Une autre objection est que l'on ne peut pas donner sens au carré de la distribution de Dirac en 0. Par exemple, on considère la famille de fonctions $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ définie par :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \text{ si } |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \phi_\varepsilon(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Soit alors $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a, en utilisant Taylor avec reste intégral à l'ordre 1,

$$\int_{\mathbb{R}}\phi_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon\varphi(0) + O(\varepsilon^2)) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi(0).$$

et ainsi $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Toutefois,

$$\int_{\mathbb{R}}\phi_\varepsilon^2(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2}\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon\varphi(0) + O(\varepsilon^3))$$

qui diverge lorsque ε tend vers 0. Donc $(\phi_\varepsilon^2)_{\varepsilon>0}$ ne converge pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

D'un point de vue plus abstrait, on ne peut pas définir une loi de composition interne commutative et associative sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ prolongeant à $\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}'(\Omega)$ la multiplication que l'on vient de définir sur $\mathcal{D}'(\Omega)\times C^\infty$. Si cela était le cas, on aurait par exemple : $\delta_0\cdot\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\delta_0$. D'où, en multipliant les deux membres par x, on aurait d'une part : $x(\delta_0\cdot\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)) = (x\delta_0)\cdot\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. D'autre part, $x(\delta_0\cdot\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)) = x(\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\delta_0) = (x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right))\cdot\delta_0 = 1\cdot\delta_0 = \delta_0$, d'où la contradiction.

Nous verrons plus loin que l'on peut définir le produit de convolution de deux distributions (moyennant des hypothèses sur leurs supports respectifs), ce produit ayant alors une interprétation physique naturelle.

4.1.3 Les équations $xT = 0$, $xT = 1$ et $xT = S$

Nous allons étudier ces trois équations pour $d = 1$. Mentionnons qu'il est possible d'obtenir des résultats analogues en dimension d quelconque pour le système d'équations $x_i T = 0$.

Proposition 4.1.10. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a alors équivalence entre*

1. $xT = 0$.
2. $\exists z \in \mathbb{C}$, $T = z\delta_0$.

Démonstration : On a déjà vu que, si $T = z\delta_0$, alors $xT = zx\delta_0 = 0\,z = 0$. D'où une première implication.

Pour l'autre sens, supposons que $xT = 0$. Pour $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 =< xT, \theta >=< T, x\theta >$. Donc T est nulle sur toutes les fonctions de la forme $x\theta$, $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Caractérisons ces fonctions. Tout d'abord, si $\psi = x\theta$, $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, il est clair que $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et que $\psi(0) = 0$. Réciproquement, soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\psi(0) = 0$. Supposons que supp $\psi \subset [-A, A]$. Par la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1, on peut écrire que $\psi(x) = \psi(0) + x\int_0^1 \psi'(tx)\mathrm{d}t = x\theta(x)$ où $\theta(x) = \int_0^1 \psi'(tx)\mathrm{d}t$. Alors, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$ et si $|x| > A$, on a $\psi(x) = 0$ d'où $\theta(x) = \psi(x)/x = 0$. Donc $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Finalement, T s'annule sur toutes les fonctions $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\psi(0) = 0$. Fixons $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\chi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Posons $\psi = \varphi - \varphi(0)\chi$. Alors $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\psi(0) = 0$. Donc $< T, \psi >= 0$, soit encore

$$< T, \varphi >= \varphi(0) < T, \chi >= z < \delta_0, \varphi > \quad \text{avec } z =< T, \chi > .$$

En d'autres termes, $T = z\delta_0$. D'où l'autre implication.

□

On peut alors étudier la même équation avec un second membre. On commence par regarder l'équation $xT = 1$.

Proposition 4.1.11. *Les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telles que $xT = 1$ sont de la forme $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + C\delta_0$, $C \in \mathbb{C}$.*

Démonstration : On a déjà vu en exemple que $x\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$. Donc si T est une solution de l'équation $xT = 1$, on doit avoir $x(T - \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)) = 0$. Par la proposition précédente, $T - \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = C\delta_0$ avec $C \in \mathbb{C}$.

□

On retrouve ici le principe général de résolution des équations linéaires : l'ensemble des solutions est un espace affine dirigé par le noyau de l'application linéaire qui définit l'équation considérée (soit l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée) et passant par une solution particulière de l'équation. Nous pouvons en fait résoudre l'équation $xT = S$ pour n'importe quel second membre $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Proposition 4.1.12. *Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors l'équation $xT = S$ admet une solution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.*

Démonstration : On fixe $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\chi(x) = 1$ pour $|x| < 1$. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on définit la fonction $L\varphi$ par

$$L\varphi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\chi(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } L\varphi(0) = \varphi'(0).$$

On vérifie que $L\varphi$ est aussi un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et que :

$$\forall m \geq 0,\ \exists C, \quad p_m(L\varphi) \leq C p_{m+1}(\varphi). \tag{4.1}$$

En effet, il est évident que $L\varphi$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Le fait que $L\varphi$ soit C^∞ au voisinage de 0 découle de la formule :

$$\forall x \in [-1, +1], \quad L\varphi(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \int_0^1 \varphi'(sx)\mathrm{d}s$$

et du théorème B.2.3 de dérivation sous le signe intégral, qui montre également que

$$\forall x \in [-1, +1],\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad (L\varphi)^{(k)}(x) = \int_0^1 s^k \varphi^{(k+1)}(sx)\mathrm{d}s.$$

Ceci donne immédiatement l'inégalité (4.1). Enfin $L\varphi$ est évidemment à support compact (plus précisément supp $L\varphi \subset$ supp $\chi \cup$ supp φ).
On définit la distribution T par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad < T, \varphi >=< S, L\varphi > .$$

L'application L étant linéaire, on vérifie facilement, en utilisant (4.1), que c'est une distribution. De plus, la définition de L montre que $L(x\varphi) = \varphi$ (car $(x\varphi)(0) = 0$) et $< xT, \varphi >=< T, x\varphi >=< S, L(x\varphi) >=< S, \varphi >$, d'où $xT = S$.

□

4.2 Dérivation d'une distribution

4.2.1 Définition, propriétés et exemples

Nous avons déjà vu au chapitre 1, lors de notre étude de la fonction de Heaviside, qu'il est envisageable de donner un sens à la dérivée d'une fonction qui n'est pas dérivable au sens classique. Nous allons maintenant voir, et c'est là l'un des concepts les plus étonnants de la théorie des distributions, que l'on peut dériver à n'importe quel ordre une distribution quelconque et que cette dérivation est une opération continue. La situation est donc totalement différente du cadre des fonctions dérivables classiques. Il faut se dire que si une fonction classique n'est pas dérivable, cela signifie simplement que sa dérivée est une distribution qui n'est pas une fonction. La dérivée usuelle peut laisser échapper l'essentiel de la "vraie" dérivée, par exemple une masse de Dirac dans le cas de la fonction de Heaviside.

Le tout est de trouver "la bonne formule" pour définir la "bonne" notion de dérivée des distributions. Pour cela, regardons ce qui se passe dans le cas des distributions associées à une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$. Par intégration par parties (cf §2.3.3) :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})^d,\ < T_{\partial_{x_i} f}, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \partial_{x_i} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{\text{supp }\varphi} f(x)\partial_{x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x = -< T_f, \partial_{x_i}\varphi > .$$

Bien entendu, notre définition générale de la dérivée d'une distribution doit coïncider avec la notion de dérivée classique dans le cas des fonctions de classe C^1, nous allons donc adopter la définition suivante.

Définition 4.2.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $i \in \{1, \ldots, d\}$. La forme linéaire $\partial_{x_i} T$ définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ < \partial_{x_i} T, \varphi >= -< T, \partial_{x_i}\varphi >$$

est une distribution sur Ω appelée i-ième dérivée partielle de T.

Le fait que $\partial_{x_i} T$ soit une distribution est évident. Il est clair aussi que si T est une distribution d'ordre m donné, alors $\partial_{x_i} T$ est d'ordre au plus $m+1$.
La définition de $\partial_{x_i} T$ peut être itérée autant de fois que voulu, on peut donc définir, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha T$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ < \partial^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \varphi > .$$

La proposition suivante est tout à fait remarquable de simplicité lorsqu'on la compare aux énoncés équivalents dans le cadre des fonctions classiques qui requièrent tous des hypothèses très fortes de convergence uniforme.

Proposition 4.2.2. *Soit $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ qui converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $(\partial^\alpha T_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\partial^\alpha T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Démonstration : Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$< \partial^\alpha T_n, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T_n, \partial^\alpha \varphi > \xrightarrow[n\to\infty]{} (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \varphi >=< \partial^\alpha T, \varphi > .$$

D'où le résultat voulu.

□

La dérivation se comporte tout aussi bien vis-à-vis du produit par une fonction C^∞.

Proposition 4.2.3. *Soit $a \in C^\infty(\Omega)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors, $\partial_{x_i}(aT) = (\partial_{x_i} a)T + a\partial_{x_i} T$.*

Démonstration : Cela provient directement de la dérivée d'un produit de fonctions :

$$\langle \partial_{x_i}(aT), \varphi \rangle = -\langle aT, \partial_{x_i}\varphi \rangle = -\langle T, a\partial_{x_i}\varphi \rangle = -\langle T, \partial_{x_i}(a\varphi) \rangle + \langle T, (\partial_{x_i} a)\varphi \rangle .$$

□

Exercice 4.2.4. *Montrer la formule de Leibniz (cf §2.1) $\partial^\alpha(aT) = \ldots$ lorsque $a \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Proposition 4.2.5. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\operatorname{supp} \partial^\alpha T \subset \operatorname{supp} T$.*

Exemple 4.2.6. *La dérivée d'une distribution T_f avec $f \in C^1(\mathbb{R})$ est la distribution $T_{f'}$. Plus généralement, la i-ième dérivée partielle d'une distribution T_f avec $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ est la distribution $T_{\partial_{x_i} f}$. Cela résulte de la formule d'intégration par parties (2.2).*

Exemple 4.2.7. *Soit H la fonction de Heaviside qui vaut 0 sur $]-\infty, 0[$, $\frac{1}{2}$ en 0 et 1 sur $]0, +\infty[$. Alors, $H' = \delta_0$. En effet,*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ < H', \varphi >= - < H, \varphi' >= -\int_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) =< \delta_0, \varphi > .$$

Exemple 4.2.8. *La fonction définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \log|x|$ et une valeur quelconque en 0 est dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. On peut donc lui associer une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a alors : $(T_f)' = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$.*

En effet, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a $< f', \varphi >= - < f, \varphi' >= -\int_{\mathbb{R}} \log|x| \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x$. Or, par intégrabilité du logarithme en 0, on a

$$-\int_{\mathbb{R}} \log|x| \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \log|x| \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x := -\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors,

$$I_\varepsilon = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log(-x) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \log(x) \cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

On effectue une intégration par parties dans chacune des deux intégrales pour obtenir :

$$I_\varepsilon = -\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x + \varphi(-\varepsilon)\log(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\log(\varepsilon).$$

Puisque $\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi'(t)\,dt$, on a $|\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)| \leq \|\varphi'\|_\infty \varepsilon$ et donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi(-\varepsilon)\log(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)\log(\varepsilon) = 0.$$

On en déduit :

$$< f', \varphi >= -\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x = \left\langle \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle.$$

D'où le résultat annoncé.

Exemple 4.2.9. *Soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et posons, pour $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = \int_0^x u(t)\mathrm{d}t$. Alors v est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $v' = u$ au sens des distributions.*

Commençons par montrer la continuité de v. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge vers x_0. On a : $\forall n \geq 0,\ v(x_n) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,x_n]}(t)u(t)\mathrm{d}t$. Par le TCD, la suite $(v(x_n))_{n\geq 0}$ converge alors vers $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,x_0]}(t)u(t)\mathrm{d}t = v(x_0)$, d'où la continuité de v en x_0, donc sur $\mathbb{R}$.
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et supposons que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-A, A]$. En utilisant Fubini, on a :

$$\begin{aligned}
< v', \varphi > &= -< v, \varphi' >= -\int_{-A}^{A} \left(\int_0^x u(t)\mathrm{d}t\right) \varphi'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^A \int_0^x u(t)\varphi'(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{-A}^0 \int_x^0 u(t)\varphi'(x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^A u(t) \left(\int_t^A \varphi'(x)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t + \int_{-A}^0 u(t) \left(\int_{-A}^t \varphi'(x)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^A u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t + \int_{-A}^0 u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t =< u, \varphi > .
\end{aligned}$$

D'où $v' = u$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exemple 4.2.10. *On renvoie le lecteur à la définition A.1.9 dans l'appendice d'une mesure de Radon. La forme associée à la dérivée α-ième d'une mesure de Radon μ sur Ω, notée $\partial^\alpha \mu$, est l'application de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ donnée par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ < \partial^\alpha \mu, \varphi >= \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x) d\mu(x).$$

C'est une forme linéaire sur C_0^∞. Si $K \subset \Omega$ est compact, on a l'inégalité, due au fait que μ charge de manière finie les compacts :

$$\left| \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x) d\mu(x) \right| \leq \mu(K) \max_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

En particulier, pour tout $a \in \Omega$, les dérivées de la masse de Dirac en a sont

$$< \partial_\alpha \delta_a, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} \partial_\alpha \varphi(a).$$

C'est une distribution d'ordre exactement $|\alpha|$, comme démontré en §3.3.3. Si μ est une mesure définie par une densité $\rho(x)$ qui est de classe C^k, i.e. $d\mu(x) = \rho(x)dx$, on a, pour $|\alpha| \leq k$:

$$\int_\Omega (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(x)d\mu(x) = \int_\Omega (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(x)\rho(x)dx = \int_\Omega \partial^\alpha\rho(x)\varphi(x)dx,$$

et ainsi la forme linéaire $\partial^\alpha\mu$ est associée à la mesure de densité $\partial^\alpha\rho$. Remarquons que nous avons à nouveau utilisé la formule d'intégration par parties (2.2). Remarquons que dans ce cas, $\partial_\alpha\mu$ est d'ordre 0.

4.2.2 L'équation $T' = 0$.

Nous nous plaçons ici en dimension $d = 1$. Nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.2.11. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a $T' = 0 \Leftrightarrow T$ est constante.*

Remarque 4.2.12. *La phrase "T est constante" signifie que $T = T_f$, où f est une constante sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration : Si on suppose que $T = T_f$, avec f constante, alors $(T_f)' = T_{f'} = 0$ puique f' est la fonction nulle.

Réciproquement, supposons que $T' = 0$. Alors, si $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $< T', \theta >= - < T, \theta' >= 0$. Donc T s'annule sur toutes les fonctions $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ de la forme $\psi = \theta'$ où $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Caractérisons ces fonctions. On montre que

$$(\exists\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \psi = \theta') \iff \left(\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ et } \int_\mathbb{R} \psi(x)\mathrm{d}x = 0\right).$$

Le sens direct est évident puisque θ est à support compact. Réciproquement, on pose : $\theta(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t)\mathrm{d}t$ avec supp $\psi \subset [-M, M]$. Il est clair que $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si $x < -M$, alors $\theta(x) = 0$ (car ψ est nulle sur $]-\infty, x]$ dans ce cas). Si $x > M$, alors $\int_x^{+\infty} \psi(t)\mathrm{d}t = \int_\mathbb{R} \psi(t)\mathrm{d}t = 0$ par hypothèse. D'où,

$$\forall x > M,\ \theta(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t)\mathrm{d}t + 0 = \int_{-\infty}^x \psi(t)\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \psi(t)\mathrm{d}t = \int_\mathbb{R} \psi(t)\mathrm{d}t = 0,$$

donc supp $\theta \subset [-M, M]$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Et bien entendu $\psi = \theta'$.

Nous allons utiliser cette équivalence. Fixons $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\int_\mathbb{R} \chi(x)dx = 1$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Posons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \varphi(x) - \left(\int_\mathbb{R} \varphi(t)\mathrm{d}t\right)\chi(x).$$

Alors $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\int_\mathbb{R} \psi(t)\mathrm{d}t = 0$. Par conséquent, il existe $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi = \theta'$ et $< T, \psi >= 0$. Alors, par linéarité de T,

$$< T, \varphi >=< T, \chi > \cdot \int_\mathbb{R} \varphi(t)\mathrm{d}t = C < 1, \varphi >=< C, \varphi >, \text{ avec } C =< T, \chi >\in \mathbb{C}.$$

Donc T est constante.

□

La démonstration précédente peut être adaptée pour montrer que si I est un intervalle et $T \in \mathcal{D}'(I)$, alors T est constante sur I si et seulement si $T' = 0$.
Le résultat persiste en dimension supérieure, en supposant l'ouvert Ω connexe, mais sa démonstration est plus difficile.

4.2.3 Formule des sauts en dimension 1

On se donne une fonction f sur un intervalle $]a,b[$, avec $a < b$ telle qu'il existe un nombre fini de points $(a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ tels que

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} = b$$

et, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, f est de classe C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$ et admet une limite à droite et une limite à gauche en a_i. On note $f(a_i^+)$ la limite à droite et $f(a_i^-)$ la limite à gauche de f en a_i. On remarque qu'une fonction C^1 par morceaux vérifie ces hypothèses. [1]

Il est facile de montrer que la fonction f est dans $L^1_{\text{loc}}(]a,b[)$, et donc qu'elle définit une distribution T_f, dont on va calculer la dérivée $(T_f)'$. Par définition, pour $\varphi \in C_0^\infty(]a,b[)$,

$$< (T_f)', \varphi >= - < T_f, \varphi'(x) >= - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Comme $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx = \varphi(a_{i+1})f(a_{i+1}^-) - \varphi(a_i)f(a_i^+) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx$, on a la relation

$$- \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx + \sum_{i=1}^{n} f(a_i^+)\varphi(a_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1}).$$

Soit, en notant $T_{f'}$ la distribution définie par f' sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$,

$$< (T_f)', \varphi >=< T_{f'}, \varphi > + \sum_{i=1}^{n} (f(a_i^+) - f(a_i^-)) < \delta_{a_i}, \varphi > .$$

On a ainsi démontré le théorème suivant.

Théorème 4.2.13. *La distribution $(T_f)'$ est donnée, à partir de $T_{f'}$ et des sauts de f en chaque a_i, par*

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{n} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i}.$$

Exemple 4.2.14. *Le fait que la dérivée au sens des distributions de la fonction de Heaviside est δ_0 est un cas particulier du théorème précédent.*

Exemple 4.2.15. $\mathbb{1}'_{[0,1]} = \delta_0 - \delta_1$.

La formule des sauts s'étend aux dérivées successives, comme pour la dérivée seconde, en considérant les sauts de f et ceux de sa dérivée. Soit, en supposant de plus que f est de classe C^2 sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ et que f' a une limite à gauche et une limite à droite en chaque point a_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(T_f)'' = T_{f''} + \sum_{i=1}^{n} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta'_{a_i} + \sum_{i=1}^{n} (f'(a_i^+) - f'(a_i^-))\delta_{a_i}.$$

On en déduit aussi la proposition :

1. La propriété "f C^1 par morceaux sur $[a,b]$" est plus forte, puisqu'elle impose en plus que f' a des limites à gauche et à droite en tout point.

Proposition 4.2.16. *Soit u une fonction C^1 définie sur un intervalle $[a,b]$. On la prolonge par 0 à l'extérieur de $[a,b]$ et on note ce prolongement $\underline{u}$. De même, on note $\underline{u'}$ le prolongement de la fonction u', définie par u' sur $]a,b[$ et par 0 à l'extérieur. Alors*

$$(T_{\underline{u}})' = T_{\underline{u'}} + u(a)\delta_a - u(b)\delta_b.$$

Cette proposition est le cas particulier où la fonction u est de classe C^1 par morceaux d'un résultat plus général :

Proposition 4.2.17. *Soit I un intervalle ouvert, $g \in C^0(I)$, telle que sa dérivée au sens des distributions g' vérifie $g' \in L^1_{loc}(I)$, $a, b \in I$. Alors,*

$$(T_{g1_{[a,b]}})' = T_{g'1_{[a,b]}} + g(a)\delta_a - g(b)\delta_b.$$

La démonstration de cette proposition est laissée en exercice.

4.3 Distributions à support compact

4.3.1 Définitions et extension à C^∞

Définition 4.3.1. *On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact lorsque* supp T *est compact. On note l'ensemble des distributions à support compact $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

Exemple 4.3.2. *Soit $a \in \Omega$. La distribution de Dirac δ_a est une distribution à support compact. Tout élément f de $L^1_c(\Omega)$ définit une distribution à support compact T_f sur Ω.*

Proposition 4.3.3. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Il existe $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ tel que*

$$\text{supp } (1-\chi) \subset (\text{supp } T)^c. \tag{4.2}$$

Pour un tel χ, $\chi T = T$.

Démonstration : On pose $K = \text{supp } T$ et

$$K_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \ : \ \exists y \in K, \ |x-y| \leq \varepsilon \right\}.$$

En utilisant la compacité de K, on montre que K_ε est compact, et, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, $K_\varepsilon \subset \Omega$.
On fixe alors un tel ε, et on considère une fonction plateau $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, valant 1 sur K_ε. Montrons que (4.2) est vérifié. Soit $x \in \text{supp } (1-\chi)$. Il existe alors une suite $(x_n)_n$ de Ω telle que $\chi(x_n) \neq 1$ et $\lim_n x_n = x$. Puisque χ vaut 1 sur K_ε, on en déduit que $x_n \notin K_\varepsilon$, et donc $\forall y \in K, \quad |x_n - y| > \varepsilon$. En passant à la limite, on en déduit

$$\forall y \in K, \quad |x-y| \geq \varepsilon.$$

En particulier, $x \notin K = \text{supp } T$, ce qui montre (4.2).
Il reste à montrer que $\chi T = T$, c'est à dire que $(1-\chi)T = 0$. Par définition du support de T, T est nulle sur $(\text{supp } T)^c$, et le résultat recherché découle de (4.2)

□

Corollaire 4.3.4. *Toute distribution à support compact est d'ordre fini.*

Démonstration : Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, et $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ donné par la proposition 4.3.3. Par cette proposition, on a $T = \chi T$. Soit $L = \text{supp } \chi$, qui est un compact. Puisque T est une distribution, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in C_L^\infty(\Omega), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C p_m(\varphi).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Alors $\chi\varphi \in C_L^\infty(\Omega)$ et par ce qui précède,

$$|\langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \chi\varphi \rangle| \leq C p_m(\chi\varphi) \leq C \times C_m p_m(\chi) p_m(\varphi),$$

où on a utilisé le Lemme 4.1.1. Donc T est bien une distribution d'ordre fini (au plus m).

□

On note $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$. On rappelle que cet espace est muni d'une notion de convergence (cf la définition 4.1.3). Les deux propositions suivantes montrent que $\mathcal{E}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathcal{E}(\Omega)$, au même titre que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Proposition 4.3.5. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$. On se donne $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ vérifiant (4.2). L'application, définie par*

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega), \quad \left\langle \widetilde{T}, \varphi \right\rangle = \langle \chi T, \varphi \rangle$$

*ne dépend pas du choix de χ vérifiant (4.2). C'est une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}(\Omega)$. Par "*continue*", on entend que pour toute suite $(\varphi_n)_n$ de $\mathcal{E}(\Omega)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$,*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\langle \widetilde{T}, \varphi_n \right\rangle = \left\langle \widetilde{T}, \varphi \right\rangle. \tag{4.3}$$

En pratique, on note encore T le prolongement de T à $\mathcal{E}(\Omega)$, noté $\widetilde{T}$ dans la proposition précédente.

Exemple 4.3.6. *Soit $a \in \Omega$. On peut prolonger la distribution de Dirac δ_a à $\mathcal{E}(\Omega)$ par la formule*

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega), \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Soit $f \in L_c^1(\Omega)$, on peut prolonger T_f à $\mathcal{E}(\Omega)$ par la formule

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega), \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration : Montrons la proposition 4.3.5. On commence par remarquer que l'application $\widetilde{T}$, $\varphi \mapsto < T, \chi\varphi >$ est bien défini sur $\mathcal{E}(\Omega)$. En effet, si $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$, alors $\chi\varphi$ est un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$ et on peut lui appliquer la distribution T. La linéarité de $\widetilde{T}$ est évidente.

Montrons que $\widetilde{T}$ ne dépend pas du choix de χ. Soit donc, pour $j \in \{1, 2\}$, $\chi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ vérifiant (4.2). On a

$$\langle T, \chi_1 f \rangle - \langle T, \chi_2 f \rangle = \langle T, (\chi_1 - \chi_2) f \rangle.$$

Si $\chi_1(x) = \chi_2(x) = 1$, alors $\chi_1(x) - \chi_2(x) = 0$. On en déduit :

$$\text{supp } (\chi_1 - \chi_2) \subset \text{supp } (1 - \chi_1) \cup \text{supp } (1 - \chi_2) \subset (\text{supp } T)^c.$$

On a donc bien

$$\langle T, \chi_1 \varphi \rangle = \langle T, \chi_2 \varphi \rangle.$$

Il reste à montrer la continuité de $\widetilde{T}$. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de $\mathcal{E}(\Omega)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{E}(\Omega)$. On a en particulier, en notant $K = \text{supp}\,\chi$,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{m,K}(\varphi - \varphi_n) = 0.$$

Par le lemme 4.1.1 sur les normes de produits de fonctions, cela implique

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} p_m(\chi\varphi - \chi\varphi_n) = 0.$$

Puisque $\text{supp}\,\chi\varphi_n \subset \text{supp}\,\chi$ pour tout n, et $\text{supp}\,\chi\varphi \subset \text{supp}\,\chi$, on en déduit que $(\chi\varphi_n)_n$ converge vers $\chi\varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Par la continuité de T :

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \chi\varphi_n\rangle = \langle T, \chi\varphi\rangle\,,$$

ce que signifie exactement (4.3).

□

Proposition 4.3.7. *Soit S une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}(\Omega)$ (là encore,* continue *signifie qu'elle vérifie (4.3)). Alors $S = \widetilde{T}$, où $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est à support compact et $\widetilde{T}$ est défini dans la proposition 4.3.5.*

On peut donc identifier exactement $\mathcal{E}'(\Omega)$ (défini comme l'espace vectoriel des distributions à support compact sur Ω) avec le dual topologique de $\mathcal{E}(\Omega)$.

Démonstration : Cette démonstration ne sera pas exigible en examen pour le cours de MACS 2. Soit T la restriction de S à $\mathcal{D}(\Omega)$. On vérifie aisément que T est une distribution : si $(\varphi_n)_n$ est une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, c'est aussi une suite de $\mathcal{E}(\Omega)$ qui converge dans $\mathcal{E}(\Omega)$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle S, \varphi_n\rangle = \langle S, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle\,.$$

Il reste à montrer que T est à support compact. On raisonne par l'absurde. Si T n'est pas à support compact, il existe une suite $(x_n)_n$ dont on ne peut extraire aucune sous-suite convergente et telle que $x_n \in \text{supp}\ T$. Pour tout n, il existe donc ε_n tel que, en notant $K_n := B(x_n, \varepsilon_n)$, on ait

$$K_n \subset \Omega, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$
$$\exists \varphi_n \in C^\infty_{K_n}(\Omega), \quad \langle T, \varphi_n\rangle \neq 0.$$

On pose $\psi_n = n\,\frac{\varphi_n}{\langle T, \varphi_n\rangle}$, de telle manière que $< T, \psi_n >= n$. Soit K un compact quelconque de Ω. Alors pour n grand, $K \cap K_n = \emptyset$: si ce n'était pas le cas, on pourrait extraire de $(x_n)_n$, en utilisant la compacité de K, une sous-suite convergente, contredisant le choix des x_n. On en déduit

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = 0, \quad \text{dans } \mathcal{E}(\Omega).$$

D'autre part, par construction

$$\langle S, \psi_n\rangle = \langle T, \psi_n\rangle = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ces deux affirmations contredisent la propriété de continuité séquentielle de S, ce qui termine la preuve.

□

4.3.2 Distributions à support ponctuel

Nous avons déjà vu dans les exemples plus haut que supp $\delta_a = \{a\}$. On montre de même que le support des dérivées du Dirac est aussi un singleton. En fait, la réciproque est vraie au sens du théorème suivant.

Théorème 4.3.8. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et soit $x_0 \in \Omega$. Supposons que* supp $T = \{x_0\}$. *Il existe alors un entier m et des nombres complexes $(a_\alpha)_{|\alpha|\leq m}$ tels que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ < T, \varphi >= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0),$$

ce qui peut encore s'écrire

$$T = \sum_{|\alpha|\leq m} \tilde{a}_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0},\ ou\ \tilde{a}_\alpha = (-1)^{|\alpha|} a_\alpha.$$

Démonstration : Pour simplifier les notations et ne conserver que les principales idées de la preuve, nous allons nous restreindre au cas de la dimension $d = 1$. Sans perdre en généralité on peut aussi supposer que $x_0 = 0$.

Tout d'abord, comme T est à support compact, T est d'ordre fini. Notons m l'ordre de T. Soit χ une fonction plateau valant 1 dans un voisinage compact de 0 inclus dans $]-1,1[$ et 0 hors de $]-1,1[$. On note, pour $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\chi_r(x) = \chi(x/r)$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-u)^m \varphi^{(m+1)}(xu)\mathrm{d}u.$$

En posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-u)^m \varphi^{(m+1)}(xu)\mathrm{d}u$, on définit une fonction de classe C^∞ et on a $\psi(x) = \mathcal{O}(x^{m+1})$ au voisinage de 0.

La fonction $\chi\varphi$ est à support compact et elle est égale à φ au voisinage de 0, donc, comme supp $T = \{0\}$, on a :

$$< T, \varphi >=< T, \chi\varphi >= \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} < T, \chi x^k > + < T, \chi\psi > .$$

Or, $\chi\psi$ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $(\chi\psi)(x) = O(x^{m+1})$ au voisinage de 0. Montrons que cela entraîne que $< T, \chi\psi >= 0$.

Notons $\tilde{\psi} = \chi\psi$. Par la formule de Leibniz, on a

$$\forall \ell \leq m,\ (\chi_r \tilde{\psi})^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{k}{\ell} \chi_r^{(\ell-k)} \tilde{\psi}^{(k)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $k \leq \ell \leq m$. Comme $\tilde{\psi}(x) = O(x^{m+1})$ au voisinage de 0, par unicité du développement limité, $\tilde{\psi}^{(k)}(x) = O(x^{m+1-k})$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi_r^{(\ell-k)}(x) = r^{k-\ell}\chi^{(\ell-k)}(x/r)$. Alors, pour r assez petit et $|x| \leq r$,

$$|\chi_r^{(\ell-k)}(x)\tilde{\psi}^{(k)}(x)| \leq r^{m+1-k} r^{k-\ell} ||\chi^{(\ell-k)}||_\infty = r^{m+1-\ell}||\chi^{(\ell-k)}||_\infty \leq r||\chi^{(\ell-k)}||_\infty.$$

Donc,

$$\lim_{r\to 0} \left\| (\chi_r \tilde{\psi})^{(\ell)} \right\|_\infty = \lim_{r\to 0} \sup_{|x|\leq r} \left| (\chi_r \tilde{\psi})^{(\ell)}(x) \right| = 0.$$

Comme supp $T = \{0\}$ et que χ_r vaut 1 au voisinage de 0,

$$\forall r > 0, \ < T, \tilde{\psi} >=< T, \chi_r \tilde{\psi} > .$$

Comme T est d'ordre m, que $\chi_r \tilde{\psi}$ est à support dans $[-r, r]$ et $[-r, r] \subset [-1, 1]$ qui est un compact fixe, on a

$$\forall 0 < r < 1, \ | < T, \chi_r \tilde{\psi} > | \leq \sum_{\ell \leq m} C_{[-1,1]} ||(\chi_r \tilde{\psi})^{(\ell)}||_\infty \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

D'où, $| < T, \chi_r \tilde{\psi} > | \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0$ et ainsi $< T, \tilde{\psi} >= 0$.

Finalement,

$$< T, \varphi >= \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} < T, \chi x^k > +0 = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{k!} < T, \chi x^k > \right) \varphi^{(k)}(0).$$

D'où le résultat en posant $a_k = \frac{1}{k!} < T, \chi x^k >$.

□

Chapitre 5

Transformation de Fourier

De façon classique, la transformée de Fourier est définie sur $L^1(\mathbb{R}^d)$ par la formule

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} \mathrm{d}x$$

où $x \cdot \xi$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^d$. Cette théorie classique n'est pas entièrement satisfaisante : en effet la transormation de Fourier n'est pas une bijection de l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$: la transformée de Fourier d'une fonction intégrable est continue, et donc une fonction intégrable non continue ne peut pas s'écrire comme la transformée de Fourier d'une fonction intégrable. Par la formule d'inversion de Fourier cela implique aussi que la tranformée de Fourier d'une fonction intégrable non continue n'est pas intégrable.
Dans ce chapitre nous allons étendre la tranformation de Fourier à une bijection d'un espace contenant L^1 (et en fait tous les espaces L^p) dans lui même, en utilisant la théorie des distributions. Pour cela, nous allons définir la transformation de Fourier d'une distribution par dualité, comme nous l'avons fait pour la multiplication et la dérivée des distributions, en posant :

$$< \mathcal{F}T, \varphi > = < T, \mathcal{F}(\varphi) >$$

pour toute fonction test φ. Nous voyons tout de suite que cette définition pose problème : si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, rien ne permet d'affirmer que $\mathcal{F}(\varphi)$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. En fait la transformée de Fourier d'une fonction à support compact non nulle n'est *jamais* à support compact !
Nous commencerons donc par agrandir l'espace des fonctions test, en introduisant un espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, contenant $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et strictement inclus dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, et qui est invariant par la transformée de Fourier. Nous allons ensuite étendre la transformation de Fourier par dualité au dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, qui peut-être identifié à un sous-espace strict de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Comme nous l'avons noté dans des situations analogues, il est intéressant de choisir l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ le plus petit possible, pour que son dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ soit le plus grand possible. Cette approche peut paraître paradoxale : pour étendre la transformation de Fourier à un espace plus grand que $L^1(\mathbb{R}^d)$, on commence par l'étudier sur un espace plus petit !

5.1 La transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

5.1.1 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Dans cette partie on introduit l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, puis on étudie la transformation de Fourier sur cet espace. Pour pouvoir dériver les éléments de $\mathcal{S}'$, on commence par se restreindre à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, une condition suffisante pour que $\hat{f}$ soit dérivable est que f et $x \mapsto xf(x)$ soient toutes deux intégrables. Plus généralement, pour avoir $\hat{f}$ de classe C^∞, il suffit d'avoir

$x \mapsto x^p f(x)$ intégrable pour tout $p \geq 0$. On veut aussi avoir le même contrôle pour toutes les dérivées de f. Cela conduit à introduire l'espace de Schwartz.

Définition 5.1.1. *L'espace $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, appelé espace de Schwartz, est constitué des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \exists C_{\alpha,\beta} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta}. \tag{5.1}$$

L'espace $\mathcal{S}$ est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel (on considère ici des fonctions à valeurs complexes).

Exemple 5.1.2.

1. *$C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}$.*
2. *Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\ z > 0$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-z|x|^2}$ est dans $\mathcal{S}$.*
3. *Toutes les fonctions de la forme $x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{-z|x|^2}$ avec $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\ z > 0$ et P une fonction polynomiale, sont dans* S.

Remarque 5.1.3. *Dans la définition 5.1.1, nous aurions pu remplacer (5.1) par la condition*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \lim_{|x| \to +\infty} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = 0.$$

Avant de définir la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$ nous donnons encore quelques propriétés de cet espace. Commençons par le munir d'une topologie. Pour cela on définit les semi-normes

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,\ \forall f \in \mathcal{S},\ p_{\alpha,\beta}(f) = \max_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|, \tag{5.2}$$

puis les normes

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall f \in \mathcal{S},\ q_N(f) = \max_{\substack{|\alpha| \leq N \\ |\beta| \leq N}} |p_{\alpha,\beta}(f)$$

et enfin la distance :

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{1}{2^N} \min(q_N(\varphi - \psi), 1)$$

Théorème 5.1.4. *Muni de cette distance, $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel métrique complet.*

Nous laissons la démonstration (sans surprise) de ce théorème au lecteur intéressé. Nous avons alors les propriétés suivantes que nous ne démontrerons pas.

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, les applications $f \mapsto x^\alpha f$ et $f \mapsto \partial^\alpha f$ sont continues de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.
2. Le produit de deux éléments de $\mathcal{S}$ est un élément de $\mathcal{S}$ (c'est une conséquence de la formule de Leibniz).
3. L'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}$.
4. Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.
5. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Par la définition de la distance sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $(\varphi_n)_n$ converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ quand n tend vers l'infini si et seulement si

$$\forall N \geq 0, \quad \lim_{n \to \infty} q_N(\varphi - \varphi_n) = 0.$$

5.1.2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

On remarque que, pour $f \in \mathcal{S}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. La définition qui suit a donc bien un sens.

Définition 5.1.5. *Pour $f \in \mathcal{S}$, la transformée de Fourier de f, que l'on note $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ est la fonction définie par*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{R^d} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}x$$

où pour $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$, $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots x_d\xi_d$.

Commençons par calculer la transformée de Fourier d'une Gaussienne. Cet exemple est essentiel non seulement dans un cadre théorique pour obtenir la formule d'inversion de Fourier, mais aussi dans diverses applications, comme dans le calcul des probabilités (voir théorème de Lévy ou le Théorème Central Limite).

Exemple 5.1.6. *Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit $f\ :\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}$. Alors $f \in \mathcal{S}$ et*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\xi|^2}{4\lambda}}. \tag{5.3}$$

Etape 1. *On commence par effectuer le calcul dans le cas où $d = 1$ et $z = \lambda > 0$ est réel. Le théorème de dérivation sous le signe intégral montre que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et*

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} -\mathrm{i}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x.$$

L'usage du théorème est justifié par domination à l'aide de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$ qui décroît plus vite à l'infini que n'importe quel polynôme et en particulier $x\mathrm{e}^{-\lambda x^2} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
Comme $x\mathrm{e}^{-\lambda x^2} = -\frac{1}{2\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$, on a

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = \frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x$$

et une intégration par parties montre que

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi}(\xi) = -\frac{\xi}{2\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x.$$

Ainsi $\hat{f}$ est solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{\xi}{2\lambda}\hat{f}$ avec comme condition initiale $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}$. L'unique solution de ce problème de Cauchy est bien

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4\lambda}}.$$

Etape 2. *On passe au cas où $d \geq 2$. Le résultat est alors une conséquence directe du théorème de Fubini et de la propriété de morphisme de l'exponentielle :*

$$\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\lambda|x|^2}\mathrm{d}x = \left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_1\xi_1}\mathrm{e}^{-\lambda x_1^2}\mathrm{d}x_1\right)\cdots\left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_d\xi_d}\mathrm{e}^{-\lambda x_d^2}\mathrm{d}x_d\right),$$

ce qui donne la formule voulue.

Remarque 5.1.7. *On peut étendre la formule précédente à l'ouvert* $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\ \lambda > 0\}$*, en utilisant la technique du prolongement analytique.*

La formule donnée dans cet exemple se généralise ainsi : soit une matrice réelle symétrique $A \in \mathcal{S}_\mathrm{d}(\mathbb{R})$ définie positive. Si on considère la densité Gaussienne centrée

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ G_A(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(A)}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(A^{-1}x|x)},$$

alors $G_A \in \mathcal{S}$ et on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(G_A)(\xi) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(A\xi|\xi)}.$$

Cela s'obtient à partir de la formule que l'on a démontrée en diagonalisant A en base orthonormée.

Une des propriétés fondamentales de la transformation de Fourier est qu'elle échange multiplication et dérivation :

Théorème 5.1.8. *Soit* $f \in \mathcal{S}$*. Alors,*

1. *la fonction* $\mathcal{F}(f)$ *est de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^d$ *et on a, pour tout* $j \in \{1, \ldots, d\}$*,*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(x_j f)(\xi) = \mathrm{i}\partial_{\xi_j}\mathcal{F}(f)(\xi). \tag{5.4}$$

2. *Pour tout* $j \in \{1, \ldots, d\}$*,*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(\partial_{x_i} f)(\xi) = \mathrm{i}\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi). \tag{5.5}$$

Démonstration. La fonction $(x, \xi) \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$,

$$|\partial_{\xi_j}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x))| = |-\mathrm{i}x_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)| = |x_j f(x)|$$

et $x \mapsto x_j f(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ car $f \in \mathcal{S}$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral pour obtenir

$$\partial_{\xi_j}\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{\xi_j}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x))\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} -\mathrm{i}x_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x$$

ce qui établit le premier point.
Pour montrer le second point, intégrons pas parties par rapport à x_j :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\partial_{x_j} f(x)\mathrm{d}x_j = \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\right]_{x_j=-\infty}^{x_j=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} (\partial_{x_j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}) f(x)\mathrm{d}x_j = \mathrm{i}\xi_j \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x_j$$

car $x_j \mapsto f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_d)$ tend vers 0 lorsque $|x_j| \to +\infty$ puisque $f \in \mathcal{S}$. Puis, comme $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\partial_{x_j} f(x)| = |\partial_{x_j} f(x)|$ et que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, de même que $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)$, on peut intégrer l'égalité issue de l'intégration par parties selon les variables autres que x_j pour obtenir, via Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\partial_{x_j} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi_j \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x,$$

ce qui prouve le second point. □

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ échange donc dérivation et multiplication par x. Par conséquent, $\mathcal{F}$ échange régularité et décroissance à l'infini : quand nous aurons défini cette transformation sur un espace plus large de fonctions, nous verrons que plus une fonction est dérivable, plus sa transformée de Fourier décroît rapidement à l'infini.

La propriété précédente permet en particulier de démontrer l'invariance de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par $\mathcal{F}$:

Corollaire 5.1.9. *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est une application linéaire continue de $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$.*

Démonstration. En itérant le théorème 5.1.8, on obtient que pour tous multiindices α, β, $\mathcal{F}(g)$ est de classe $C^{|\beta|}$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \mathcal{F}(g)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |D_x^\alpha(x^\beta g(x))| \mathrm{d}x < +\infty.$$

Ceci implique facilement que $\mathcal{F}(g)$ est un élément de $\mathcal{S}$ et, en utilisant la formule de Leibniz et en remarquant que $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|)^{d+1}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$:

$$\forall N \geq 0,\ \exists C_N > 0, \quad q_N\left(\mathcal{F}(g)\right) \leq C_N q_{N+d+1}(g).$$

Ceci prouve que $\mathcal{F}(g) \in \mathcal{S}$ et que l'application $g \mapsto \mathcal{F}(g)$ est continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ par la formule de Leibniz. □

5.1.3 Formule d'inversion de Fourier

À l'aide de la transformée de Fourier de la Gaussienne, nous allons maintenant démontrer le théorème d'inversion de Fourier dans le cadre de la classe de Schwartz.

Théorème 5.1.10. *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ est une application linéaire bijective, continue et d'inverse continu. Son inverse $\overline{\mathcal{F}}$ est donné par*

$$\forall g \in \mathcal{S},\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \overline{\mathcal{F}}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} g(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{5.6}$$

Remarque 5.1.11. *La formule (5.6) peut s'écrire :*

$$\forall g \in \mathcal{S},\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \overline{\mathcal{F}}(g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \mathcal{F}(g)(-x).$$

Remarque 5.1.12. *Ce théorème montre en particulier que la transformation de Fourier est bien une bijection de $\mathcal{S}$, comme nous l'avons souhaité lors de sa construction.*

Démonstration. On a déjà démontré que $\mathcal{F}$ est une application continue et linéaire de $\mathcal{S}$ dans lui-même. Par conséquent, $\overline{\mathcal{F}}$ est également une application continue de $\mathcal{S}$ dans lui-même. Il nous reste à prouver que $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}g = g$ pour tout $g \in \mathcal{S}$. Pour cela il faudrait pouvoir considérer l'intégrale $\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi} g(y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}\xi$. Mais, la fonction $(y, \xi) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}g(y)$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R}_y^d \times \mathbb{R}_\xi^d)$ et on ne peut donc pas intervertir les intégrales par Fubini. On va procéder par approximation. On remarque que, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon\to 0, \varepsilon>0} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Or, la fonction $(y, \xi) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}g(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}_y^d \times \mathbb{R}_\xi^d)$ pour tout $\varepsilon > 0$. On peut donc lui appliquer le théorème de Fubini et obtenir :

$$I_\varepsilon = \int \left(\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\varepsilon|\xi|^2}\mathrm{d}\xi\right) g(y)\mathrm{d}y.$$

D'après la formule (5.3), on a

$$I_\varepsilon = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^d \int \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon}} g(y)\mathrm{d}y = \pi^{\frac{d}{2}} 2^d \int \mathrm{e}^{-|z|^2} g(x - 2\sqrt{\varepsilon} z)\mathrm{d}z.$$

D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = \pi^{\frac{d}{2}} 2^d g(x) \int \mathrm{e}^{-|z|^2}\mathrm{d}z = (2\pi)^d g(x).$$

D'où, $\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} \hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi = (2\pi)^d g(x)$ et $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}$. On montre de même que $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}$. □

Il est courant de noter $\check{g}$ la fonction $x \mapsto g(-x)$. Avec cette notation, la relation d'inversion de Fourier s'écrit :

$$\mathcal{F}\mathcal{F}g = (2\pi)^d \check{g}.$$

5.1.4 Théorème de Plancherel

Passons à présent aux propriétés hilbertiennes de la transformation de Fourier. Le théorème de Plancherel montre que cette transformation est une isométrie de L^2 et que lorsque l'on passe de l'espace classique à l'espace de Fourier on ne "perd" aucune information du point de vue de l'espace L^2.

Théorème 5.1.13. *Soient f et g dans $\mathcal{S}$. On a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) g(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x \tag{5.7}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\mathrm{d}\xi. \tag{5.8}$$

En particulier pour $f = g$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi. \tag{5.9}$$

Démonstration. Le premier point est une application directe de la définition de la transformée de Fourier et du théorème de Fubini. Les fonctions dans l'intégrale double étant dans $\mathcal{S}$, elles sont intégrables.
On applique alors (5.7) aux fonctions f et $h = \frac{1}{(2\pi)^d}\overline{\hat{g}}$ pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) h(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{h}(x)\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs, par la formule d'inversion de Fourier,

$$\hat{h}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\overline{\hat{g}}(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{(2\pi)^d}\overline{\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\hat{g}(\xi)\mathrm{d}\xi} = \overline{\overline{\mathcal{F}}\hat{g}(x)} = \overline{g}(x).$$

D'où le résultat.
La dernière identité est alors évidente. □

5.1.5 Convolution

Voyons à présent comment la transformée de Fourier se comporte vis-à-vis des translations avant de voir la relation entre produit de convolution et transformée de Fourier.

Proposition 5.1.14. *Soit $a \in \mathbb{R}^d$. Si $\tau_a : x \mapsto x + a$, alors pour toute $f \in \mathcal{S}$, $f \circ \tau_a$ a pour transformée de Fourier*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(f \circ \tau_a)(\xi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi \cdot a}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

De plus,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\cdot x} f)(\xi) = (\mathcal{F}(f) \circ \tau_a)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi + a).$$

Démonstration. Pour le premier point, on effectue le changement de variables $z = x + a$ dans l'intégrale de Fourier

$$\mathcal{F}(f \circ \tau_a)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x} f(x+a)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot(z-a)} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot a}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Le second point découle directement de la définition de la transformée de Fourier. □

Proposition 5.1.15. *Soient f et g dans $\mathcal{S}$. Alors $f \star g \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$. Réciproquement, $\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{(2\pi)^d}\mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)$.*

Démonstration. Rappelons tout d'abord la définition du produit de convolution pour deux fonctions, l'une intégrable et l'autre bornée :

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d), \forall g \in L^\infty(\mathbb{R}^d),\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\ (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y.$$

Cette définition est licite pour f et g dans $\mathcal{S}$. De plus, à y fixé, la fonction $x \mapsto f(y)g(x-y)$ est C^∞ et pour tout $\beta \in \mathbb{N}^d$, $|\partial_x^\beta(f(y)g(x-y))| = |f(y)(\partial_x^\beta g)(x-y)| \le C_{0,\beta}|f(y)|$ en reprenant les notations de la définition de $\mathcal{S}$. Or, $y \mapsto C_{0,\beta}|f(y)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, donc par dérivation sous le signe intégral, $f \star g$ est de classe C^∞ et $\partial^\beta(f \star g) = f \star (\partial^\beta g)$.
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Comme $x^\alpha = (x - y + y)^\alpha = \sum_{\gamma\le\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}(x-y)^\gamma y^{\alpha-\gamma}$, on peut écrire

$$x^\alpha\partial^\beta(f \star g) = x^\alpha f \star (\partial^\beta g) = \sum_{\gamma\le\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}(x^{\alpha-\gamma}f) \star (x^\gamma\partial^\beta g)$$

et cette fonction est dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. D'où $f \star g \in \mathcal{S}$. On peut alors appliquer le théorème de Fubini à la fonction intégrable $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ pour obtenir, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f \star g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi} g(x-y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \mathcal{F}(f)(\xi)\mathcal{F}(g)(\xi).\end{aligned}$$

On a donc obtenu le premier point. Pour le second nous allons utiliser la transformée de Fourier inverse. On applique le premier point à $\varphi = \mathcal{F}(f)$ et $\psi = \mathcal{F}(g)$. Alors, $\hat{\varphi} = (2\pi)^d\check{f}$ et $\hat{\psi} = (2\pi)^d\check{g}$ d'où :

$$\mathcal{F}(\varphi\psi)(x) = \mathcal{F}(\hat{f} \cdot \hat{g})(x) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f \star g))(x) = (2\pi)^d(f \star g)(-x).$$

En appliquant la transformation de Fourier aux deux membres de cette égalité, on obtient le second point. □

5.2 L'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées

Pour pouvoir définir la transformée de Fourier d'une fonction, il nous a fallu contrôler sa croissance à l'infini. C'est la cas pour une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ ou dans $\mathcal{S}$. Par contre, il n'est pas possible de définir cette transformée pour une fonction seulement localement intégrable. Il en résulte que par dualité, nous n'allons pas pouvoir définir la transformée de Fourier sur tout $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ mais seulement sur l'un de ses sous-espaces, celui des distributions dites tempérées.

Définition 5.2.1. *Une distribution tempérée est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$, c'est à dire telle que pour toute suite de $(\varphi_n)_n$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\lim_n \varphi_n = \varphi \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} < T, \varphi_n >=< T, \varphi > .$$

Proposition 5.2.2. *Soit T une forme linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors T est une distribution tempérée si et seulement si*

$$\exists k, l \in \mathbb{N},\ \exists C > 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{S},\ |\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k, |\beta|\leq l} p_{\alpha,\beta}(\varphi) \tag{5.10}$$

où les $p_{\alpha,\beta}$ sont définies en (5.2). On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées.

Remarque 5.2.3. *Comme $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}$, toute distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ définit par restriction une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Cette forme linéaire est bien dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ puisque pour tout compact K, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, il existe $C_{K,\alpha} > 0$ telle que, pour toute fonction test $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans K, $p_{\alpha,\beta}(\varphi) \leq C_{K,\alpha} \sup_K |\partial^\beta \varphi|$.*
De plus, cette identification à un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est licite car l'application $T \mapsto T|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^d)}$ est injective car si $T|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^d)}$, alors $T = 0$ sur $\mathcal{S}$ par densité de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}$. On a donc

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d).$$

Exemple 5.2.4.
1. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, la distribution T_f définie par une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. C'est une conséquence de l'inégalité de Hölder.*
2. *Toute fonction continue à croissance polynomiale définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^d$.*
3. *Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite à croissance polynomiale,* i.e. *telle qu'il existe $p \geq 0$, $a_k = \mathcal{O}(|k|^p)$ lorsque k tend vers l'infini. Alors la distribution sur $\mathbb{R}$,*

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \delta_k$$

est tempérée. En effet, il existe $C > 0$ et $p \geq 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|a_k| \leq C(1 + |k|^{2p})$. Alors, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi\rangle| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k||\varphi(k)| \leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + k^{2p})|\varphi(k)| \\ &\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}(1 + k^2 + k^{2p} + k^{2p+2})|\varphi(k)| \\ &\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} \sum_{i\leq 2p+2} p_{i,0}(\varphi) \end{aligned}$$

et $C' = C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} < +\infty$.

4. *La distribution définie par la fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ n'est pas tempérée. En effet, soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[0,2]$ et valant 1 sur $[\frac{1}{2},1]$. Pour $j \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_j(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\psi\left(\frac{x}{j}\right)$. Alors $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}$. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}|x^\alpha \varphi_j^{(\beta)}(x)| &= \left|\sum_{\gamma=0}^{\beta}\binom{\beta}{\gamma}\left(-\frac{1}{2}\right)^\gamma x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{j^{\beta-\gamma}}\psi^{(\beta-\gamma)}\left(\frac{x}{j}\right)\right| \\ &\leq C_{\alpha,\beta}\sup_{x\geq 0} x^\alpha \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sum_{\gamma=0}^{\beta}\sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi^{(\beta-\gamma)}(x)| := M_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

Or,

$$\langle T_{\mathrm{e}^\cdot}, \varphi_j\rangle = \int_0^{2j}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\psi\left(\frac{x}{j}\right)\mathrm{d}x \geq \int_{\frac{j}{2}}^{j}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\frac{j}{2}}(\mathrm{e}^{\frac{j}{2}}-1) \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty.$$

Donc $T_{\mathrm{e}^\cdot}$ n'est pas tempérée.
De même, pour tout $\varepsilon > 0$, $x \mapsto \mathrm{e}^{\varepsilon|x|} \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

5. *Toutefois, pour appartenir à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, il n'est pas nécessaire d'être majoré par un polynôme. Soit pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x}$. Alors $|f(x)| = \mathrm{e}^x$, mais $f(x) = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x}$ et*

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx = \int \frac{1}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x}\right)\varphi(x)\,dx = -\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x}\varphi'(x)\,dx,$$

par une intégration par parties élémentaire. On en déduit

$$\left|\int f(x)\varphi(x)\,dx\right| \leq \sup_x|\varphi'(x)|,$$

ce qui montre que f définit bien une dérivation tempérée. Intuitivement, ce sont les oscillations rapides de la fonction qui compensent le comportement exponentiel (donc non tempéré) du module de la fonction.

Une dernière classe importante d'exemples est donnée par les distributions à support compact. On rappelle qu'une telle distribution définit une forme linéaire continue sur l'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions C^∞.

Proposition 5.2.5. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors la restriction de T à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une distribution tempérée.*

Démonstration. Il est évident que cette restriction est linéaire sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il reste à vérifier la continuité. Cette dernière découle immédiatement de la continuité de l'injection de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$: si $(\varphi_n)_n$ est une suite de fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $(\varphi_n)_n$ converge également vers φ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$. □

Voyons à présent les liens entre opérations sur les distributions et distributions tempérées.

Proposition 5.2.6. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

1. *Pour tout $j \in \{1,\ldots,d\}$, $\partial_{x_j}T$ et x_jT sont dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Donc, si P est un polynôme sur $\mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $P\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*
2. *Soit f une fonction C^∞ à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées i.e.*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ \exists C > 0,\ \exists N > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\partial_x^\alpha f(x)| \leq C(1+|x|)^N.$$

Alors $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 5.2.7. *Le produit d'une distribution tempérée par une fonction C^∞ quelconque donne en général un élément de $\mathcal{D}'$ qui n'est pas forcément dans $\mathcal{S}'$.*

Nous terminons cette section par la définition de la notion de convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition 5.2.8. *On dit qu'une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distributions tempérées converge vers $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ lorsque :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle T_n, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \varphi\rangle.$$

Tout comme dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, la convergence est compatible avec les opérations de dérivation et de multiplication par une fonction C^∞ à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées. En revanche, on prendra bien garde au fait que la convergence au sens des distributions n'implique pas la convergence au sens des distributions tempérées. Par exemple, si $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est non nulle et f_n est définie par

$$f_n(x) = \psi(x-n)e^{n^4},$$

T_{f_n} tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, mais n'a pas de limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Remarquons qu'elle tend aussi vers 0 dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (mais bien sûr ni dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ni dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$).

5.3 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

5.3.1 Définition et propriétés

Nous avons déjà démontré au théorème 5.1.13 que pour toute paire de fonctions f et g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(f)(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathcal{F}(g)(x)\mathrm{d}x. \tag{5.11}$$

Cette identité nous suggère de définir de manière analogue la transformée de Fourier d'une distribution tempérée.

Définition 5.3.1. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. La transformée de Fourier de T, notée $\mathcal{F}(T)$ ou $\hat{T}$, est la distribution tempérée définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle \mathcal{F}(T), \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle.$$

Le fait que la transformation de Fourier soit une distribution tempérée découle du fait de $\mathcal{F}$ est une application continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$: si $\lim_n \varphi_n = \varphi$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\lim_n \hat{\varphi}_n = \hat{\varphi}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc

$$\lim_n < \mathcal{F}(T), \varphi_n >= \lim_n < T, \hat{\varphi}_n >=< T, \hat{\varphi} >=< \mathcal{F}(T), \varphi > .$$

D'après (5.11), la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ coïncide avec celle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour une distribution tempérée de la forme T_f avec $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

On définit de manière analogue la transformation $\overline{\mathcal{F}}$.

Appliquer la transformée de Fourier à une distribution tempérée revient à l'appliquer à des fonctions tests dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il est donc naturel que toutes les propriétés de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se transposent au cadre des distributions dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 5.3.2. *La transformation de Fourier $\mathcal{F} : \ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire, continue, bijective et de réciproque continue. De plus, $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. La transformation de Fourier est bien sûr linéaire.

Le caractère bijectif de la transformation de Fourier et la formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'$ sont conséquences du théorème 5.1.10. En effet, on a, pour toute $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle = \langle T, \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}(\varphi)\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

Donc $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}T = T$. Puis, si $(T_n)_{n\geq 0}$ converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\langle \mathcal{F}T_n, \varphi\rangle = \langle T_n, \mathcal{F}\varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle,$$

ce qui montre que $\mathcal{F}(T_n)$ converge vers $\mathcal{F}(T)$ dans $\mathcal{S}'$, et donc que $\mathcal{F}$ est une application continue de $\mathcal{S}'$ dans lui-même. De même pour $\overline{\mathcal{F}}$, la réciproque de $\mathcal{F}$. □

Proposition 5.3.3. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On a :*

1. *$\mathcal{F}\mathcal{F}T = (2\pi)^d\check{T}$, où pour toute $\varphi \in \mathcal{S}$, $\langle \check{T}, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle$ et $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.*
2. *Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathcal{F}(\partial_{x_j}T) = \mathrm{i}\xi_j\mathcal{F}T$.*
3. *Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, $\mathcal{F}(x_jT) = \mathrm{i}\partial_{\xi_j}\mathcal{F}T$.*
4. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, en notant $\tau_a : x \mapsto x + a$, $\mathcal{F}(T \circ \tau_a) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\cdot\xi}\mathcal{F}T$.*
5. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\cdot x}T) = (\mathcal{F}T) \circ \tau_a$.*

Démonstration. Le premier point est une conséquence immédiate du théorème 5.3.2. Les deuxièmes et troisièmes points sont directement obtenus à partir des résultats du théorème 5.1.8. Les quatrièmes et cinquièmes points sont une conséquence de la proposition 5.1.14. Précisons que l'on pose ici, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\langle T \circ \tau_a, \varphi\rangle = \langle T, \varphi \circ \tau_a\rangle$. □

Pour le moment, nous ne traduisons pas dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ les relations entre transformée de Fourier et convolution données dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 5.3.4.

1. *On a $\mathcal{F}\delta_0 = 1$. En effet,*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S},\ \langle \mathcal{F}\delta_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}\varphi\rangle = (\mathcal{F}\varphi)(0) = \int \varphi(x)\mathrm{d}x = \langle 1, \varphi\rangle.$$

2. *En combinant avec la translation τ_a, on obtient, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, $(\mathcal{F}\delta_a)(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot a}$. En effet on peut vérifier directement que $\delta_a = \delta_0 \circ \tau_a$.*
3. *On a $\mathcal{F}1 = (2\pi)^d\delta_0$. En effet, $\mathcal{F}1 = \mathcal{F}\mathcal{F}\delta_0 = (2\pi)^d\check{\delta}_0 = (2\pi)^d\delta_0$.*
4. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $a \in \mathbb{R}^d$ et $\xi \in \mathbb{R}^d$. Alors :*

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha\delta_0)(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^\alpha \ \ et \ \ (\mathcal{F}\partial^\alpha\delta_a)(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot a}.$$

Cela découle directement de la proposition 5.3.3.

5. *Soit $T = \mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrons tout d'abord que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Pour cela, on écrit*

$$vp\left(\frac{1}{x}\right) = V_1 + V_2,$$

où les distributions V_1 et V_2 sont définies par

$$< V_1, \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx \quad et \quad < V_2, \varphi >= \int_{|x|>1}\frac{1}{x}\varphi(x)\,dx.$$

La distribution V_1 est à support compact, donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. La distribution V_2 est T_f, où $f(x) = \mathbb{1}_{|x|\geq 1}\frac{1}{x}$. Puisque f est dans $L^2(\mathbb{R})$, on en déduit $V_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{S}'$ est un espace vectoriel, on en déduit vp $\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Donc, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Calculons alors $\hat{T}$. On part de l'égalité $xT = 1$. Alors, $\mathcal{F}(xT) = 2\pi\delta_0$ soit encore $\mathrm{i}\partial_\xi \hat{T} = 2\pi\delta_0$. Par intégration, si H désigne la distribution de Heaviside, il existe $C \in \mathbb{R}$, $\hat{T} = -2\mathrm{i}\pi H + C$. Or, comme T est impaire, $\hat{T}$ aussi. En effet, l'imparité s'obtient par un changement de variable $u = -x$ dans la définition de la valeur principale de $1/x$ et le fait que la transformée de Fourier préserve l'imparité découle de l'égalité :

$$\mathcal{F}(\check{\varphi})(\xi) = \int e^{-ix.\xi}\varphi(-x)dx = \int e^{-iu(-\xi)}\varphi(u)du = \check{\mathcal{F}(\varphi)}.$$

Puis on écrit :

$$2i\pi H - C = -\hat{T} = \check{\hat{T}} = -2i\pi\check{H} + C.$$

On applique cette égalité à une fonction test d'intégrale 1 à support dans $[0, +\infty[$ pour obtenir $2\mathrm{i}\pi - C = C$ soit encore $C = \mathrm{i}\pi$. On obtient donc

$$\mathcal{F}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) = -2\mathrm{i}\pi H + \mathrm{i}\pi.$$

6. *On reprend les notations de l'exemple précédent. Alors, $\mathcal{F}\mathcal{F}T = 2\pi\check{T} = -2\pi\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc, $-2\mathrm{i}\pi\mathcal{F}H + \mathrm{i}\pi 2\pi\delta_0 = -2\pi\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$. On en déduit que*

$$\mathcal{F}H = -\mathrm{i}\mathrm{vp}\left(\frac{1}{x}\right) + \pi\delta_0.$$

5.3.2 Retour sur la transformation de Fourier dans L^1 et dans L^2

On fait ici le lien entre la transformation de Fourier au sens des distributions et la théorie classique de la transformation de Fourier.

Théorème 5.3.5. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier au sens classique :*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

Alors

$$\mathcal{F}(T_f) = T_{\hat{f}}.$$

Remarque 5.3.6. *Dans le théorème précédent, $\mathcal{F}(T_f)$ désigne la transformée de Fourier au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de l'élément T_f de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Le théorème signifie que la transformation de Fourier au sens classique et la transformée de Fourier au sens des distributions coïncident.*

Démonstration. Remarquons que $\hat{f}$ est une fonction continue et bornée, donc $T_{\hat{f}}$ est bien un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$< T_{\hat{f}}, \varphi > = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

La fonction $(x, \xi) \mapsto f(x)\varphi(\xi)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{2d}$. Par le théorème de Fubini,

$$< T_{\hat{f}}, \varphi > = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x = \left\langle T_f, \hat{\varphi}\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}(T_f), \varphi\right\rangle,$$

ce qui montre le résultat annoncé. □

On passe maintenant à l'étude de la transformation de Fourier dans L^2. On rappelle que les éléments de L^2 définissent des distributions tempérées, et donc que leur transformation de Fourier est bien définie.

Théorème 5.3.7 (Théorème de Plancherel)**.** *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\mathcal{F}(T_f) = T_g$. De plus,*

$$\|f\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|g\|_{L^2}.$$

En pratique, on identifie f à T_f, T_g à g et on note donc $g = \hat{f}$. Avec ces conventions, le théorème précédent s'énonce alors :

"Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\|f\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|\hat{f}\|_{L^2}$."

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$. Alors

$$\langle \mathcal{F}(T_f), \varphi \rangle = \int f(x)\hat{\varphi}(x)\mathrm{d}x$$

et donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis le théorème de Plancherel dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\left|\langle \mathcal{F}(T_f), \varphi \rangle\right| \leq \|f\|_{L^2}\|\hat{\varphi}\|_{L^2} \leq (2\pi)^{d/2}\|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}.$$

La forme linéaire $\varphi \mapsto \langle \mathcal{F}(T_f), \varphi \rangle$, définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, est donc continue pour la topologie de L^2. Puisque $\mathcal{S}$ est dense dans L^2, on peut la prolonger de manière unique en une forme linéaire continue sur L^2, dont la norme d'opérateur est au plus $(2\pi)^{d/2}\|f\|_{L^2}$. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \mathcal{F}(T_f), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

On a donc montré $\mathcal{F}(T_f) = T_g$. Le raisonnement précédent montre aussi l'inégalité : $\|g\|_{L^2} \leq (2\pi)^{d/2}\|f\|_{L^2}$. En appliquant ce résultat à la fonction g, on obtient qu'il existe $h \in L^2$ tel que $\mathcal{F}(T_g) = T_h$ et $\|h\|_{L^2} \leq (2\pi)^{d/2}\|g\|_{L^2}$. Par le théorème d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'$, on a en fait $h(x) = (2\pi)^d f(-x)$, et l'inégalité précédente s'écrit : $(2\pi)^d\|f\|_{L^2} \leq (2\pi)^{d/2}\|g\|_{L^2}$, ce qui termine la preuve. □

Exercice 5.3.8. *Calculer la transformation de Fourier de $\mathbb{1}_{[-1,+1]}$. En déduire*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

5.3.3 Transformée de Fourier des distributions à support compact

On rappelle que $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Nous pouvons donc voir ce que l'on obtient lorsque l'on applique la transformée de Fourier à une distribution à support compact. La décroissance à l'infini étant maximale pour une telle distribution, on s'attend à obtenir une régularité maximale.

Théorème 5.3.9. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $e_\xi : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. La distribution tempérée $\mathcal{F}T$ est la distribution associée à la fonction $\xi \mapsto \langle T, e_{-\xi} \rangle$. Cette fonction, notée $\xi \mapsto \mathcal{F}T(\xi)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et est à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées.*

La démonstration utilise des résultats de dérivation et d'intégration sous le crochet.

Chapitre 6

Exemples d'équations aux dérivées partielles

Dans ce chapitre, on donne deux exemples d'étude d'équations aux dérivées partielles par la théorie des distributions et la transformation de Fourier. La première partie du chapitre est consacrée à l'équation elliptique $-\Delta u + u = f$, la deuxième partie à l'équation de la chaleur.

6.1 Étude d'une équation elliptique

6.1.1 Résolution de l'équation par la transformation de Fourier

On considère l'équation

$$(1-\Delta)u = f, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{6.1}$$

Le symbole Δ désigne le laplacien sur $\mathbb{R}^d$:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{(\partial x_j)^2}.$$

Le second membre f est donné dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. L'inconnue est la distribution u. On a alors le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 6.1.1. *Soit $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de l'équation* (6.1) *au sens des distributions.*

Remarque 6.1.2. *La condition $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ doit être vue comme une restriction sur la croissance de u à l'infini. Elle est importante pour l'unicité de la solution. Par exemple, lorsque $d = 1$, et $f = 0$, l'équation devient*

$$-u'' + u = 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation dans C^2 est un espace vectoriel de dimension 2, qui a une base formée des deux fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$. Le seul élément de cet espace vectoriel qui est également dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est la fonction constante nulle.

Démonstration. On prend la tranformée de Fourier des deux membres de l'équation (6.1). On voit que cette équation est équivalente à :

$$(1+|\xi|^2)\hat{u} = \hat{f}, \tag{6.2}$$

où
$$|\xi|^2 = \sum_{j=1}^{d} \xi_j^2.$$
La fonction C^∞ $\xi \mapsto \frac{1}{1+|\xi|^2}$ est à croissance lente à l'infini. La multiplication par cette fonction est donc une application continue sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En multipliant l'équation (6.2) par cette fonction, on voit que (6.1) est équivalente à l'équation :
$$\hat{u} = \frac{1}{(1+|\xi|^2)}\hat{f},$$
ce qui montre l'existence et l'unicité de la solution. On a aussi obtenue une formule pour cette solution :
$$u = \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{(1+|\xi|^2)}\hat{f}\right),$$
où $\overline{\mathcal{F}}$ est la transformation de Fourier inverse sur $\mathbb{R}^d$. □

Remarque 6.1.3. *La méthode de résolution précédente fonctionne pour toute équation aux dérivées partielles de la forme :*
$$P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_d}\right) u = f,$$
où $P(\xi_1, \dots, \xi_d)$ est un polynôme de d variables qui vérifie ;
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad P(\xi) \neq 0.$$

Exemple 6.1.4. *Lorsque f est la fonction constante égale à C, l'unique solution de (6.1) dans $\mathcal{S}'$ est la fonction constante égale à C.*

Plus généralement, si $f = x^\alpha$, on a $\hat{f} = i^{|\alpha|}(2\pi)^d \partial_\xi^\alpha \delta_0$. La solution u de l'équation (6.1) vérifie donc
$$\hat{u} = \frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^d(1+|\xi|^2)}\partial_\xi^\alpha \delta_0.$$
Avec la formule de Leibniz, on peut montrer que $\frac{1}{(1+|\xi|^2)}\partial_\xi^\alpha\delta_0$ est une combinaison linéaire de $\partial_\xi^\beta\delta_0$, $\beta \leq \alpha$, le coefficient de ∂_ξ^α étant $\frac{i^{|\alpha|}}{(2\pi)^d}$. Donc u est une fonction polynôme de d variables, dont le terme de plus haut degré est x^α.

Exemple 6.1.5. *On suppose maintenant $d = 1$ et $f = \delta_0$. La restriction de u à $]0, +\infty[$ et à $]-\infty, 0[$ est donc solution de $-u'' + u = 0$. En résolvant l'équation sur ces deux intervalles, on obtient :*
$$u(x) = \frac{1}{2}\left(e^x \mathbb{1}_{]-\infty,0[} + e^{-x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\right).$$
On dit que u est la solution élémentaire *de l'équation (6.1).*

Exemple 6.1.6. *Lorsque $d = 1$ et f est la fonction de Heaviside $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$, on obtient (en intégrant par exemple la solution obtenue dans l'exemple précédent) :*
$$u(x) = \frac{1}{2}\left(e^x \mathbb{1}_{]-\infty,0[} - e^{-x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}\right) + \mathbb{1}_{]0,+\infty[}.$$

Dans les deux exemples précédents, la solution u est plus régulière que le second membre f. Dans l'exemple 6.1.5, le second membre est la distribution δ_0, qui n'est pas une fonction, alors que la solution est une fonction continue. Dans l'exemple 6.1.6, le second membre est une fonction non-continue, la solution est une fonction de classe C^1. Ce gain de régularité est en fait une propriété fondamentale de l'équation (6.1). On peut le mesurer dans une classe d'espace de Hilbert, qui sont un cas particulier des espaces de Sobolev.

6.2 Espaces de Sobolev

Définition 6.2.1. *Soit $s \in \mathbb{R}$. L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des éléments u de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tels que $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, muni de la norme*

$$\|u\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \, |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 6.2.2. *L'appartenance à $L^2(\mathbb{R}^d)$ doit se comprendre par : il existe $f \in L^(\mathbb{R}^d)$ telle que $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} = T_f$ et $||u||_{H^s} = ||f||_{L^2}$.*

Proposition 6.2.3. *L'espace $(H^s, ||\cdot||_{H^s})$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration. L'espace H^s, muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^s} = \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \, \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

est bien un espace pré-hilbertien. L'espace H^s est isométrique à $L^2(\mathbb{R}^d)$, l'application

$$u \mapsto \left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \hat{u}(\xi)$$

étant, d'après le théorème de Plancherel et à une constante multiplicative près, une isométrie de H^s dans L^2. La complétude de H^s découle alors de la complétude de L^2. □

Le paramètre $s \in \mathbb{R}$ mesure la régularité des éléments de H^s. On a :

$$s < \sigma \Longrightarrow H^\sigma(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d).$$

Lorsque s est entier, l'espace H^s est l'ensemble des éléments de L^2 dont toutes les dérivées d'ordre au plus s sont également dans L^2 :

Théorème 6.2.4. *Supposons $s \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$H^s\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \le s \Rightarrow \partial_x^\alpha u \in L^2 \right\}.$$

Démonstration. Supposons d'abord $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \le s$. On a alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad |\xi^\alpha| = \left| \prod_{j=1}^d \xi_j^{\alpha_j} \right| \le |\xi|^{|\alpha|} \le |\xi|^s + 1.$$

(Pour montrer la dernière inégalité, distinguer les cas $|\xi| \le 1$ et $|\xi| \ge 1$). En utilisant $\widehat{\partial_x^\alpha u} = (i\xi)^\alpha \hat{u}$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \widehat{\partial_x^\alpha u}(\xi) \right|^2 \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \le C \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^s)^2 \, |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

On a montré $\widehat{\partial_x^\alpha u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et donc, par le théorème de Plancherel 5.3.7, $\partial_x^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Réciproquement, supposons $\partial_x^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \le s$. En utilisant l'inégalité :

$$\forall (a_j)_{0\le j\le d} \in \mathbb{R}_+^{d+1}, \quad \left(\sum_{j=0}^d a_j \right)^{s/2} \le (d+1)^{s/2} \sup_{0\le j\le d} a_j^{s/2} \le (d+1)^{s/2} \sum_{j=0}^d a_j^{s/2},$$

on obtient

$$\left(|\xi|^2+1\right)^{s/2} = \left(1 + \sum_{j=1}^d |\xi_j|^2 \right)^{s/2} \le (d+1)^{s/2} \left(1 + \sum_{j=1}^d |\xi_j|^s \right),$$

et un raisonnement analogue à celui du précédent montre que u est dans H^s. □

Le théorème suivant est un cas particulier des *injections de Sobolev*.

Théorème 6.2.5. *Si $s > \frac{d}{2} + k$, alors $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d)$. De plus, u ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à s sont bornées et tendent vers 0 à l'infini.*

Ainsi, un élément de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre N sont dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, où $N > d/2 + k$, est en fait de classe C^k.

Démonstration. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s > \frac{d}{2}$. On a

$$\hat{u}(\xi) = (1 + |\xi|)^{-s/2}(1 + |\xi|)^{s/2}\hat{u}(\xi). \tag{6.3}$$

Or $\xi \mapsto (1 + |\xi|)^{s/2}\hat{u}$ (car $u \in H^s$) et $\xi \mapsto (1 + |\xi|)^{-s/2} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Ce dernier point se démontre aisément en passant en coordonnées polaires, ou en utilisant l'inégalité :

$$(1 + |\xi|)^{-s/2} \leq \prod_{j=1}^{d}(1 + |\xi_j|)^{-s/2d},$$

puis par Fubini-Tonelli :

$$\int_{\mathbb{R}^d}(1 + |\xi|)^{-s/2}\mathrm{d}\xi \leq \int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^{d}(1 + |\xi_j|)^{-\frac{s}{2d}}\mathrm{d}\xi \leq \prod_{j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}}(1 + |\xi_j|)^{-\frac{s}{2d}}\mathrm{d}\xi_j,$$

qui donne bien une quantité finie par le critére de Riemann, car $\frac{s}{2d} > 1$.
En revenant à (6.3), on obtient par Cauchy-Schwarz, $\hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. La transformation de Fourier inverse montre alors que u est continue, bornée, et tend vers 0 à l'infini.
On a montré la conclusion du théorème lorsque $k = 0$. Le cas général s'en déduit en appliquant le cas $k = 0$ à $\partial_x^\alpha u$, $|\alpha| \leq k$. □

Les deux théorèmes précédents concerne des indices s positifs, pour lesquels H^s est inclus dans L^2. Lorsque $s < 0$, H^s comprend des éléments qui ne sont pas des fonctions. La masse de Dirac est un exemple de distribution tempérée, n'appartenant pas à L^1_{loc} est qui est dans des espaces de Sobolev d'indices négatifs :

$$\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^d) \iff s < -d/2.$$

La proposition suivante, qui exprime, pour les solutions de l'équation (6.1), un gain de régularité de 2 dérivées sur l'échelle des espaces de Sobolev, découle immédiatement de la définition de ces espaces.

Proposition 6.2.6. *Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ la solution de l'équation elliptique (6.1). Alors $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^d)$.*

6.3 Introduction rapide à l'équation de la chaleur

On s'intéresse maintenant à l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d \\ u_{\restriction t=0} = u_0. \end{cases} \tag{6.4}$$

L'inconnue u est définie sur $[0, \infty[\times\mathbb{R}^d$, et on note (t, x) la variable dans $[0, \infty[\times\mathbb{R}^d$, avec $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. Le symbole Δ désigne le laplacien (ou opérateur de Laplace) par rapport à la variable x :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2.$$

La variable t s'interprète comme une variable de temps, la variable x comme une variable d'espace. La fonction (ou distribution) u_0, définie sur $\mathbb{R}^d$, est donnée. C'est la *condition initiale* de u à $t = 0$. L'équation de la chaleur (6.4) est une équation d'évolution qui détermine, à partir de la condition initiale u_0, l'état du système pour tout temps positif. Elle modélise l'évolution de la température dans l'espace en l'absence de source de chaleur extérieure, mais également de nombreux processus de *diffusion*. Elle apparaît notamment (ainsi que ses variantes plus compliquées) dans l'étude du mouvement brownien et en finances mathématiques pour la modélisation des options.

Nous commencerons par faire un calcul formel (c'est à dire sans aucune justification rigoureuse) pour obtenir deux expressions simples de la solution. [1] Nous montrerons ensuite que ces expressions simples donnent bien, dans certains cas, des solutions de (6.4).

6.3.1 Calcul formel

On notera $\hat{f}$ la transformation de Fourier par rapport à la variable d'espace x. En particulier, si $t \geq 0$, $\hat{u}(t)$ est la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto u(t,x)$. En prenant (formellement, comme annoncé), la transformée de Fourier de l'équation (6.4) on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(t,\xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(t,\xi), \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^d \\ \hat{u}_{\restriction t=0}(\xi) = \hat{u}_0(\xi). \end{cases} \tag{6.5}$$

L'équation précédente peut-être vue comme une famille d'équations différentielles ordinaires linéaires, dépendant du paramètre ξ. On résout chacune de ces équations, ce qui donne

$$\hat{u}(t) = e^{-t|\xi|^2} \hat{u}_0. \tag{6.6}$$

Remarquons que (6.6) a un sens pour tout $t > 0$, dès que $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En supposant que l'on peut utiliser la tranformation de Fourier inverse, à $t > 0$ fixé (il suffit pour cela que $e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0$ soit intégrable), on obtient :

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix\cdot\xi} \hat{u}(t,\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^d} \int e^{ix\cdot\xi - t|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi) d\xi.$$

En utilisant la définition intégrale de la transformation de Fourier de u_0 (ce qui n'est possible, a priori, que si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mais rappelons que nous ne faisons qu'un calcul formel préliminaire), on obtient :

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi - t|\xi|^2} u_0(y) dy d\xi.$$

En inversant l'ordre d'intégration :

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int u_0(y) \int e^{i(x-y)\cdot\xi - t|\xi|^2} d\xi dy.$$

L'intégrale $\int e^{i(x-y)\cdot\xi - t|\xi|^2} d\xi$ est la transformée de Fourier de la gaussienne $\xi \mapsto e^{-t|\xi|^2}$, prise au point $y - x$. Nous avons calculé cette transformée de Fourier en §5.1.2 (cf (5.3)) :

$$\int u_0(y) \int e^{i(x-y)\cdot\xi - t|\xi|^2} d\xi = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}.$$

On en déduit la formule :

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^d} \int u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy. \tag{6.7}$$

1. Prudence : l'article définie "la" sous-entend que la solution de (6.4) est unique, ce que nous n'avons pas démontré, et est faux en toute généralité

Exemple 6.3.1. *Les deux formules* (6.6) *et* (6.7) *donne* $u(t,x) = C$ *lorsque* u_0 *est la fonction constante égale à* C*.*

On justifie maintenant les calculs formels précédents.

6.3.2 Solution au sens des distributions

Soit $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et pour tout t, $\hat{u}(t)$ défini par (6.6). En d'autres termes, en notant $\overline{\mathcal{F}}$ la transformée de Fourier inverse sur $\mathbb{R}^d$,

$$u(t) = \overline{\mathcal{F}}\left(e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0\right). \tag{6.8}$$

On peut identifier u à une distribution sur $(0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ en posant, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$< u, \varphi >= \int_0^\infty \left\langle \overline{\mathcal{F}}\left(e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0\right), \varphi \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^\infty \left\langle e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0, \overline{\mathcal{F}}\varphi \right\rangle \mathrm{d}t,$$

où les crochets $\langle \cdot, \rangle$ désignent dans le membre de gauche de l'égalité, la dualité

$$\mathcal{D}'(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d),\ \mathcal{D}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d),$$

et dans les deux autres membres, la dualité entre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On montre facilement, en utilisant que u_0 est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, que cette formule définit bien une distribution.

Théorème 6.3.2. *La distribution* $u(t)$ *définie par* (6.8) *vérifie l'équation de la chaleur* $\partial_t u = \Delta u$ *au sens des distributions sur* $(0,\infty) \times \mathbb{R}^d$*. De plus,*

$$\lim_{t\to 0^+} u(t) = u_0$$

dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*.*

Remarque 6.3.3. *La limite annoncée dans le théorème signifie simplement que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \lim_{t\to 0^+} \langle u(t), \varphi \rangle = \langle u_0, \varphi \rangle. \tag{6.9}$$

Remarque 6.3.4. *Le théorème montre l'existence de la solution. On peut aussi démontrer, avec des hypothèses convenables, un théorème d'unicité de la solution dans* $\mathcal{S}'$*. Nous n'aborderons pas de problème (pourtant très important !) ici.*

Démonstration. On commence par montrer (6.9) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$\langle u(t), \varphi \rangle = \left\langle \hat{u}_0, e^{-t|\xi|^2}\overline{\mathcal{F}}\varphi \right\rangle.$$

On montre

$$\lim_{t\to 0^+} e^{-t|\xi|^2}\overline{\mathcal{F}}\varphi = \overline{\mathcal{F}}\varphi \text{ dans } \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{6.10}$$

En effet, notons $\psi = \overline{\mathcal{F}}\varphi$. Par la formule de Leibniz, pour tout multi-indice α,

$$\partial_\xi^\alpha \left(e^{-t|\xi|^2}\psi(\xi) - \psi(\xi)\right) = \left(e^{-t|\xi|^2} - 1\right)\partial_\xi^\alpha \psi(\xi) + \sum_{\alpha<\beta} \binom{\alpha}{\beta} \partial_\xi^{\alpha-\beta}\left(e^{-t|\xi|^2}\right)\partial_\xi^\beta \psi(\xi).$$

On a :

$$\left|\left(e^{-t|\xi|^2} - 1\right)\partial_\xi^\alpha \psi(\xi)\right| \le t|\xi|^2 \left|\partial_\xi^\alpha \psi(\xi)\right|,$$

par l'inégalité élémentaire $|e^{-x} - 1| \leq x$ pour $x > 0$. De plus, lorsque $\beta < \alpha$

$$\partial_\xi^{\alpha-\beta}\left(e^{-t|\xi|^2}\right)\partial_\xi^\beta \psi(\xi) = tP_{\alpha-\beta}(t,\xi)e^{-t|\xi|^2}\psi(\xi),$$

où $P_{\alpha-\beta}$ désigne une fonction polynôme en les variables $t, \xi_1, \ldots, \xi_d$, de degré maximal $|\alpha-\beta| = |\alpha| - |\beta| \leq |\alpha|$ en $\xi_1, \ldots, \xi_d$. On déduit des deux observations précédentes que pour tout $N \geq 0$,

$$q_N\left(e^{-t|\xi|^2}\psi(\xi) - \psi(\xi)\right) \leq tq_{N'}(\varphi(\xi)),$$

où $N' = \max(N+2, 2N)$ (cf (5.2) pour la définition de q_N). En particulier

$$\lim_{t\to\infty} q_N\left(e^{-t|\xi|^2}\psi(\xi) - \psi(\xi)\right) = 0,$$

ce qui montre (6.10) et donc

$$\lim_{t\to 0^+}\langle u(t), \varphi\rangle = \langle \hat{u}_0, \overline{\mathcal{F}}\varphi\rangle = \langle u_0, \varphi\rangle\,.$$

On montre maintenant que u vérifie l'équation de la chaleur au sens des distributions sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^d$. Soit $\chi \in \mathcal{D}(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$. Alors

$$< \partial_t u - \Delta u, \chi > = < u, -\partial_t\chi - \Delta\chi >\,.$$

De plus :

$$\begin{aligned}\langle u, -\Delta\chi\rangle = \int_0^\infty \left\langle e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0, \overline{\mathcal{F}}(-\Delta\chi)\right\rangle \mathrm{d}t &= \int_0^\infty \left\langle e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0, |\xi|^2\overline{\mathcal{F}}\chi\right\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \left\langle \hat{u}_0, e^{-t|\xi|^2}|\xi|^2\overline{\mathcal{F}}\chi\right\rangle \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

La lectrice attentive aura remarqué que là encore, les crochets désignaient dans certains cas (lesquels ?) la dualité entre $\mathcal{D}'(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$, et $\mathcal{D}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$, et dans d'autres, la dualité entre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. De plus $\hat{}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ désignent respectivement la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse *sur* $\mathbb{R}^d$. On a donc

$$\langle u, -\partial_t\chi - \Delta\chi\rangle = \int_0^\infty \left\langle \hat{u}_0, e^{-t|\xi|^2}|\xi|^2\overline{\mathcal{F}}\chi - e^{-t|\xi|^2}\overline{\mathcal{F}}\partial_t\chi\right\rangle = \int_0^\infty \left\langle \overline{u}_0, -\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t|\xi|^2}\overline{\mathcal{F}}\chi\right)\right\rangle.$$

On utilise alors la propriété suivante :

Lemme 6.3.5. *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\psi \in \mathcal{D}(]0,\infty[\times\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\frac{d}{dt}\langle T, \psi(t,\cdot)\rangle = \left\langle T, \frac{d\psi}{dt}(t,\cdot)\right\rangle.$$

Par le lemme (dont nous différons la démonstration),

$$\int_0^\infty \left\langle \overline{u}_0, \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-t|\xi|^2}\overline{\mathcal{F}}\chi\right)\right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left\langle \overline{u}_0, \left(e^{-t|\xi|^2}\overline{\mathcal{F}}\chi\right)\right\rangle \mathrm{d}t = 0,$$

ce qui conclut la preuve. □

Ébauche de preuve du lemme 6.3.5. Par la linéarité de T,

$$\frac{d}{dt}\langle T, \psi(t)\rangle = \lim_{h\to 0}\left\langle T, \frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}\right\rangle,$$

et il reste à montrer

$$\lim_{h\to 0}\frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h} = \frac{\partial\psi}{\partial t}(t),$$

au sens de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, ce que l'on peut faire en utilisant la formule

$$\frac{\psi(t+h,x)-\psi(t,x)}{h} = \int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial t}(t+h\sigma, x)\mathrm{d}\sigma.$$

□

6.3.3 Noyau de la chaleur

On s'intéresse maintenant à la formule (6.7) que l'on rappelle ici :

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^d}\int u_0(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\mathrm{d}y. \tag{6.11}$$

Remarquons que l'on peut interpréter cette formule comme une convolution par un noyau régularisant :

$$y(t,x) = u_0 * \frac{1}{(\sqrt{t})^d}k\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right),$$

où

$$k(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}e^{-|x|^2/4}.$$

la fonction

$$(t,x)\mapsto \frac{1}{(\sqrt{t})^d}k\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^d}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

est appelée *noyau de la chaleur*.

Théorème 6.3.6. *Soit $p\in[1,\infty)$ et $u_0\in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors la formule (6.11) définit une fonction u de classe C^∞ sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^d$, qui vérifie l'équation de la chaleur (au sens classique) sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}^d$. De plus :*

$$\lim_{t\to 0^+}\|u(t)-u_0\|_{L^p} = 0. \tag{6.12}$$

Le résultat reste vrai en prenant $p=\infty$, en supposant de plus u_0 continue.

Ébauche de preuve. La preuve de la convergence (6.12) est similaire à la preuve de la densité des fonctions C_0^∞ dans L_c^p par convolution, disponible au début de ce cours (Tome I). Dans cette preuve, le noyau gaussien k est remplacé par une fonction pic à support compact. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que la démonstration fonctionne encore, avec de petites adaptations, dans le cas du noyau gaussien.

La preuve que u vérifie l'équation de la chaleur utilise le théorème de dérivation sous le signe intégral. On prendra bien soin à se limiter à un ensemble compact $t\in[a,b]$, $|x|\leq A$, où $0<a<b<\infty$ et $A>0$, pour obtenir les hypothèses exactes de ce théorème. □

On remarque l'effet régularisant très fort de l'équation de la chaleur : la solution est C^∞ pour tous les temps strictement positifs, même si la condition initiale n'est pas continue !

Une autre propriété intéressante de l'équation de la chaleur se lit sur la formule (6.11) :

Proposition 6.3.7. *Soit $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$ une fonction positive non identiquement nulle. Alors*

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad u(t,x) > 0.$$

On en déduit également le principe du maximum :

Proposition 6.3.8. *Supposons $u_0 \in C^0(\mathbb{R}^d)$, bornée. Alors*

$$\sup_{\substack{t \geq 0 \\ x \in \mathbb{R}^d}} u(t,x) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} u_0(x).$$

Si cette borne supérieure est un maximum, elle est atteinte en $t = 0$.

Deuxième partie

Notions avancées

Chapitre 7

Espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$

7.1 Les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$

7.1.1 Définitions et premiers exemples

Nous allons commencer par définir les espaces de Sobolev d'indice $m \in \mathbb{N}$ avant de généraliser à des indices quelconques dans $\mathbb{R}$.

Définition 7.1.1. *L'espace de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^d)$ est le sous espace de $L^2(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées u telles que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| \leq m$, $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$.*

On peut alors munir cet espace d'un produit scalaire définit ainsi :

$$\forall u, v \in H^m(\mathbb{R}^d),\ (u|v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u | \partial^\alpha v)_{L^2}.$$

Ce produit scalaire induit la norme suivante sur $H^m(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall u \in H^m(\mathbb{R}^d),\ ||u||_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha u||_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 7.1.2. *L'espace $(H^m(\mathbb{R}^d), (\cdot|\cdot)_{H^m})$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration : C'est un conséquence directe de la complétude de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

□

On peut alors caractériser les espaces de Sobolev à l'aide de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 7.1.3. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors, $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^m \mathrm{d}\xi < +\infty.$$

Démonstration : On se donne $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On suppose qu'elle vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^m \mathrm{d}\xi < +\infty.$$

Or, si $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Ainsi on a, pour tout α, $|\alpha| \leq m$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)\xi^\alpha|^2 < +\infty$$

car par la formule du binôme, il existe $C_m > 0$ telle que, pour tout $|\alpha| \leq m$,

$$\prod_{j=1}^{d} |\xi_j|^{2\alpha_j} \leq (1+|\xi|^2)^m \leq C_m \sum_{|\alpha|\leq m} \prod_{j=1}^{d} |\xi_j|^{2\alpha_j}.$$

On en déduit que $\mathcal{F}(\partial^\alpha u) \in L^2(\mathbb{R}^d)$, soit $\partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$, soit encore $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$. La réciproque est alors immédiate avec les mêmes arguments.

□

On peut alors étendre les espaces de Sobolev à des indices non entiers pour pouvoir considérer une échelle continue d'espaces.

Définition 7.1.4. *Soit $s \in \mathbb{R}$. L'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ est le sous-espace de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ défini par*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi < +\infty \right\}.$$

Notons ainsi que pour $s \geq 0$, $H^s(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. Ceci n'est plus vrai pour $s < 0$. L'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ est muni du produit scalaire

$$\forall u,v \in H^s(\mathbb{R}^d),\ (u|v)_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)} \mathrm{d}\xi.$$

Cela a bien un sens car on intègre le produit dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de deux distributions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ égales respectivement à $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)$ et $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\overline{\hat{v}(\xi)}$.
On peut alors définir sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ la norme

$$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^d),\ ||u||_s^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Nous avons les premières propriétés suivantes.

Proposition 7.1.5.
1. *Si $s_1 \geq s_2$, alors $H^{s_1}(\mathbb{R}^d) \subset H^{s_2}(\mathbb{R}^d)$ et l'injection est continue.*
2. *$(H^s(\mathbb{R}^d), (\cdot|\cdot)_{H^s(\mathbb{R}^d)})$ est un espace de Hilbert.*
3. *Si $s = m \in \mathbb{N}$, $H^m(\mathbb{R}^d)$ comme défini à la définition 7.1.1 et $H^s(\mathbb{R}^d)$ coïncident algébriquement et topologiquement.*

Démonstration : Le premier point résulte de l'inégalité $(1+|\xi|^2)^{s_2} \leq (1+|\xi|^2)^{s_1}$. Pour le second point, soit $(u_j)_{j\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors $((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_j)_{j\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Elle converge donc vers $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Posons $u = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} g) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors, par le théorème de Plancherel, $u \in H^s$ et

$$||u_j - u||_{H^s(\mathbb{R}^d)} = ||(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}_j - g||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.$$

Le dernier point a été déjà été vu à la proposition 7.1.3.

□

Exemple 7.1.6. *On a $L^1(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s < -\frac{d}{2}$. En effet, si $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $s < \frac{d}{2}$.*

Exemple 7.1.7. *Puisque l'espace de Schwartz est invariant par transformée de Fourier, il est clair que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

Exemple 7.1.8. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, la distribution δ_a est dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s < -\frac{d}{2}$. En effet, on remarque que $\hat{\delta}_a(\xi) = e^{-\mathrm{i}a\xi}$, ainsi*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |e^{-\mathrm{i}a\xi}|^2(1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s \mathrm{d}\xi.$$

Cette intégrale est convergente pour $s < -\frac{d}{2}$, divergente si $s \geq -\frac{d}{2}$. De même, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \mathcal{F}(\partial_{x_j}\delta_a), \phi\rangle = \langle \partial_{x_j}\delta_a, \hat{\phi}\rangle = -\langle \delta_a, \partial_{x_j}\hat{\phi}\rangle = \mathrm{i}\xi_j e^{-\mathrm{i}a\xi}.$$

Ainsi on trouve $\partial_{x_j}\delta_a \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout $s < -\frac{d}{2} - 1$.

7.1.2 Densité des fonctions régulières

Théorème 7.1.9. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe une suite $(v_j)_{j\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers $(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}$. Posons pour tout j, $u_j = \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}v_j)$. Alors $u_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et par Plancherel,

$$||u_j - u||_s = ||v_j - (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}||_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0.$$

D'où le résultat voulu.

□

Corollaire 7.1.10. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration : Il suffit de raisonner par troncature et de montrer que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $||\cdot||_s$. Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau valant 1 si $|x| \leq 1$ et 0 pour $|x| \geq 2$. Posons $\theta_k(x) = \theta(\frac{x}{k})$ pour tout $k \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit s_0 un entier naturel tel que $s \leq s_0$. Posons pour tout $k \geq 1$, $u_k = \theta_k u$. Alors, $u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$||u_k - u||_s^2 \leq ||u_k - u||_{s_0}^2 \leq C \sum_{|\alpha|\leq s_0} ||\partial^\alpha((\theta_k - 1)u)||_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

d'après la proposition 7.1.3. Il suffit alors d'appliquer la formule de Leibniz et le théorème de convergence dominée pour montrer que ce majorant tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

□

7.1.3 Opérations sur $H^s(\mathbb{R}^d)$

A partir de l'exemple des dérivées du Dirac, on généralise au résultat suivant.

Proposition 7.1.11. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la distribution $\partial^\alpha u$ est dans $H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$ et on a*

$$||\partial^\alpha u||_{s-|\alpha|} \leq ||u||_s.$$

Démonstration : Comme on a démontré que $\mathcal{F}(\partial^\alpha u) = \mathrm{i}^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{u}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on en déduit, utilisant $|\xi^\alpha| \leq (1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}$, que

$$\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^{s-|\alpha|}|\xi^\alpha\hat{u}|^2 \mathrm{d}\xi < +\infty.$$

□

Le résultat suivant sur le produit par une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ permet de définir les espaces de Sobolev locaux $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Proposition 7.1.12. *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Alors $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et on a*

$$||\varphi u||_s \leq (2\pi)^{-d} 2^{\frac{|s|}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\tilde{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \right) ||u||_s. \tag{7.1}$$

Ainsi, pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on dit que $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ si on a, pour tout $K \subset \Omega$, $\forall \varphi \in C^\infty_K(\mathbb{R}^d)$, $\varphi u \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Par densité, on va commencer par démontrer l'inégalité (7.1) pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Nous avons défini le produit de convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et montré son lien avec la transformée de Fourier. On a alors $\varphi u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \widehat{\varphi u}(\xi) = (2\pi)^{-d}(\hat{\varphi} \star \hat{u})(\xi) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}(\eta)\mathrm{d}\eta. \tag{7.2}$$

Par ailleurs, montrons que l'on a l'inégalité :

$$\forall \xi,\ \eta \in \mathbb{R}^d,\ \forall s \in \mathbb{R},\ (1+|\xi|^2)^s \leq 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}(1+|\eta|^2)^s. \tag{7.3}$$

En effet, on a $|\xi| \leq |\xi-\eta| + |\eta|$, d'où par l'inégalité d'Archimède, $|\xi|^2 \leq 2(|\xi-\eta|^2 + |\eta|^2)$ et

$$(1+|\xi|^2) \leq 2(1+|\xi-\eta|^2+|\eta|^2) \leq 2(1+|\xi-\eta|^2)(1+|\eta|^2).$$

Si $s \geq 0$, par croissance on obtient bien (7.3). Traitons le cas $s < 0$. On écrit alors $|\eta| \leq |\xi-\eta| + |\xi|$ et comme dans le premier cas on obtient $(1+|\eta|^2) \leq 2(1+|\xi-\eta|^2)(1+|\xi|^2)$ et puisque $s < 0$,

$$(1+|\eta|^2)^{-s} \leq 2^{-s}(1+|\xi-\eta|^2)^{-s}(1+|\xi|^2)^{-s}$$

d'où encore (7.3) dans ce cas.

En utilisant (7.2) et (7.3), on obtient

$$||\varphi u||_s^2 \leq (2\pi)^{-2d} 2^{|s|} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{4}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^{\frac{1}{2}} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{4}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)|^{\frac{1}{2}} (1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{u}(\eta)| \mathrm{d}\eta \right)^2 \mathrm{d}\xi.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à l'intégrale en η pour obtenir

$$||\varphi u||_s^2 \leq (2\pi)^{-2d} 2^{|s|} \quad \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)| \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)| (1+|\eta|^2)^s |\hat{u}(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}\xi.$$

Par changement de variable dans la première intégrale, il vient

$$||\varphi u||_s^2 \leq (2\pi)^{-2d} 2^{|s|} \quad \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\eta)| \mathrm{d}\eta \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\xi-\eta)| (1+|\eta|^2)^s |\hat{u}(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi \right).$$

En utilisant le théorème de Fubini dans l'intégrale double on obtient

$$||\varphi u||_s^2 \leq (2\pi)^{-2d} 2^{|s|} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\eta|^2)^{\frac{|s|}{2}} |\hat{\varphi}(\eta)| \mathrm{d}\eta \right)^2 ||u||_s^2$$

ce qui prouve l'inégalité (7.1) pour φ et u dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.
On suppose à présent $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, soit $(u_j)_{j\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers u dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ et donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En écrivant (7.1) pour $u_j - u_k$, on voit que $(\varphi u_j)_{j\geq 1}$ est de Cauchy dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ qui est complet, donc il existe $v \in H^s(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi u_j \to v$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$. Or, $\varphi u_j \to \varphi u$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, donc par unicité de la limite, $\varphi u = v \in H^s(\mathbb{R}^d)$. On écrit alors (7.1) pour u_j et on passe à la limite. On obtient alors (7.1) pour $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

$\square$

7.2 Théorème d'injection de Sobolev

Le fait d'être dans un espace de Sobolev signifie une certaine décroissance à l'infini de la transformée de Fourier d'une distribution tempérée. Cela correspond à une certaine régularité pour la distribution et les espaces de Sobolev forme ainsi une échelle de régularité. Il se trouve que pour s suffisament grand, cette régularité correspond à l'échelle de régularité classique des fonctions de classe C^k.
Commençons par introduire, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, l'espace $C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de classe C^k sur $\mathbb{R}^d$ de limite nulle à l'infini ainsi que toute leurs dérivées, *i.e.*, $u \in C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $u \in C^k(\mathbb{R}^d)$ et

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq k,\ \lim_{|x|\to+\infty} \partial^\alpha u(x) = 0.$$

On peut munir cet espace de la norme

$$|u|_k = \max_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha u(x)|.$$

Théorème 7.2.1. *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $s > \frac{d}{2} + k$. Alors l'espace $(H^s(\mathbb{R}^d), ||\cdot||_s)$ est inclus, avec injection continue, dans l'espace $(C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^d), |\cdot|_k)$.*

Démonstration : Nous allons utiliser la fait que la transformée de Fourier envoie continûment l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace $C^0_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$.
Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s > \frac{d}{2} + k$. Alors $\hat{u}$ est mesurable et, pour tout $|\alpha| \leq k$, $(-\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En effet, on peut écrire, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\xi|^{|\alpha|}|\hat{u}(\xi)| = \frac{|\xi|^{|\alpha|}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\hat{u}(\xi)| \leq \frac{(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\hat{u}(\xi)|.$$

Comme $2s - 2k > d$, la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s-k}{2}}}$ est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et le membre de droite dans l'inégalité précédente est le produit de deux fonctions dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Il est donc dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et par intégration de l'inégalité, il existe $C > 0$, $||(-\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_s$.
Alors, $\partial^\alpha u = \mathcal{F}^{-1}((-\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}) \in C^0_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$. Donc $u \in C^k_{\to 0}(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\forall |\alpha| \leq k,\ ||\partial^\alpha u||_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq ||(-\mathrm{i}\xi)^\alpha \hat{u}||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C||u||_s.$$

$\square$

Corollaire 7.2.2. *On a*

$$\bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s(\mathbb{R}^d) \subset C^\infty_{\to 0}(\mathbb{R}^d).$$

Remarque. Il faut prendre garde au fait que ce corollaire ne signifie pas que l'intersection de tous les $H^s(\mathbb{R}^d)$ est inclus dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En effet, pour $d = 1$ par exemple, la fonction $u : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, de transformée de Fourier $\xi \mapsto e^{-|\xi|}$ est bien dans tous les $H^s(\mathbb{R})$, mais n'est pas dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Remarque. Le théorème d'injection de Sobolev n'est pas vrai pour $s = \frac{d}{2} + k$, il faut une inégalité stricte. Par exemple, pour $k = 0$, l'espace $H^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas inclus dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

7.3 Dualité

Soient $s \in \mathbb{R}$ et $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$. Pour $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\hat{u}(\xi)\hat{v}(-\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi)(1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\hat{v}(-\xi)$$

et ce second membre est donc le produit de deux fonctions dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Donc, $\xi \mapsto \hat{u}(\xi)\hat{v}(-\xi)$ est une fonction dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. On peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi)\hat{v}(-\xi)\mathrm{d}\xi \right| \leq ||u||_s \, ||v||_{-s}. \tag{7.4}$$

Par conséquent, à partir de $v \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$, on peut définir la forme linéaire $L_v : H^s(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ par

$$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^d), \; L_v(u) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi)\hat{v}(-\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\xi)\overline{\mathcal{F}}v(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

D'après (7.4), cette forme linéaire est continue et on a

$$||L_v||_{(H^s(\mathbb{R}^d))'} \leq (2\pi)^{-d}||v||_{-s}.$$

On peut donc définir une application

$$L : \begin{array}{ccc} H^{-s}(\mathbb{R}^d) & \to & (H^s(\mathbb{R}^d))' \\ v & \mapsto & L_v \end{array}.$$

Théorème 7.3.1. *L'application L est linéaire, bijective et bicontinue. Elle permet d'identifier le dual de $H^s(\mathbb{R}^d)$ à $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.*

Remarque. Pour $s = 0$ on retrouve la réflexivité de $L^2(\mathbb{R}^d)$ via Plancherel car pour $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on obtient $L_v(u) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x)v(x)\mathrm{d}x$.

Démonstration : Sa linéarité et sa continuité viennent d'être vues. Voyons tout d'abord son injectivité. Supposons que $L_v = 0$. Alors pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $L_v(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi)\overline{\mathcal{F}}v(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$. Comme la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est bijective, on en déduit que pour toute $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\xi)\overline{\mathcal{F}}v(\xi)\mathrm{d}\xi = 0$. Donc, $\overline{\mathcal{F}}v = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ d'où $v = 0$ car $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}v = v$ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. D'où l'injectivité de L.

Montrons la surjectivité de L. Soit $T \in (H^s(\mathbb{R}^d))'$. Il existe $C > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \; |\langle T, \varphi \rangle| \leq C||\varphi||_s.$$

D'autre part, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ car la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ implique celle de $H^s(\mathbb{R}^d)$. On peut alors écrire pour toute $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi \rangle| &= |\langle \mathcal{F}T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle| = |\langle (1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathcal{F}T, (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle| \\ &\leq C||\varphi||_s \leq C'||(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\overline{\mathcal{F}}\varphi||_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

En posant $\psi(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\overline{\mathcal{F}}\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on obtient donc

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ |\langle (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathcal{F}T, \psi\rangle| \leq C'||\psi||_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Cette inégalité montre que $(1+|\cdot|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathcal{F}T$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ muni de la forme L^2. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour cette même norme, cette application linéaire continue se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Donc, par le théorème de représentation de Riesz, il existe $w \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que,

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),\ \langle (1+|\cdot|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathcal{F}T, \psi\rangle = (\psi|w)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi)\bar{w}(\xi)\mathrm{d}\xi = \langle \bar{w}, \psi\rangle.$$

On en déduit que $(1+|\cdot|^2)^{-\frac{s}{2}}\mathcal{F}T = \bar{w} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ce qui prouve que $T \in H^{-s}(\mathbb{R}^d)$.
Enfin, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}(\varphi)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(\xi)\overline{\mathcal{F}}T(\xi)\mathrm{d}\xi = L_T(\varphi).$$

Donc $T = L_T$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, donc sur $H^s(\mathbb{R}^d)$ par densité. D'où la surjectivité de L.
Enfin, L^{-1} est continue par le théorème de l'isomorphisme de Banach.

□

7.4 Théorème de trace dans $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$

Considérons l'hyperplan de $\mathbb{R}^{d+1}$, $\{(x', x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_{d+1} = 0\}$, où x' désigne les d premières coordonnées. Nous nous intéressons à l'opérateur trace γ qui à une fonction raisonnable $(x', x_{d+1}) \mapsto \varphi(x', x_{d+1})$ associe la fonction $\gamma\varphi\ :\ x' \mapsto \varphi(x', 0)$. Cet opérateur γ est bien défini pour des fonctions continues, mais il n'a pas de sens a priori pour des classes de fonctions localement intégrables, l'hyperplan étant de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{d+1}$. D'autre part, il existe des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ qui sont continues pour $x_{d+1} \neq 0$ et qui tendent vers $+\infty$ lorsque x_{d+1} tend vers 0. Il paraît alors exclu de définir la trace d'une telle fonction.
Nous allons montrer que l'on peut définir γu dès que $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ pour $s > \frac{1}{2}$. Hormis en dimension 1 (et dans ce cas l'hyperplan considéré est réduit au singleton nul...), une telle condition n'implique pas la continuité de u. Nous allons donc construire γ par prolongement par continuité de l'opérateur trace usuel.

Théorème 7.4.1. *Si $s > \frac{1}{2}$, l'application*

$$\gamma\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1}) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ \varphi & \mapsto & (x' \mapsto \varphi(x', 0)) \end{array}$$

se prolonge en une application continue γ de $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. De plus, ce prolongement défini une application surjective.

Démonstration : Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C_s > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1}),\ ||\gamma\varphi||_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq C_s||\varphi||_{H^s(\mathbb{R}^{d+1})}. \tag{7.5}$$

Pour cela, considérons $\psi(x') = \varphi(x', 0)$. Ainsi

$$\hat{\psi}(\xi') = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'\xi'}\varphi(x', 0)\mathrm{d}x'.$$

Notons $\tilde{\varphi}(x',\xi_{d+1}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x_{d+1}\xi_{d+1}}\varphi(x',x_{d+1})\mathrm{d}x_{d+1}$ la transformée de Fourier partielle de φ par rapport à x_{d+1}. Ainsi, par inversion de Fourier,

$$\varphi(x',x_{d+1}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x',\xi_{d+1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_{d+1}\xi_{d+1}}\mathrm{d}\xi_{d+1}$$

et

$$\psi(x') = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x',\xi_{d+1})\mathrm{d}\xi_{d+1}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\xi') &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'\xi'}\int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(x',\xi_{d+1})\mathrm{d}\xi_{d+1}\mathrm{d}x' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x'\xi'-\mathrm{i}x_{d+1}\xi_{d+1}}\varphi(x',x_{d+1})\mathrm{d}x'\mathrm{d}x_{d+1}\mathrm{d}\xi_{d+1} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi',\xi_{d+1})\mathrm{d}\xi_{d+1}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$|\hat{\psi}(\xi')|^2 = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi',\xi_{d+1})(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^{\frac{s}{2}}(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^{-\frac{s}{2}}\mathrm{d}\xi_{d+1}\right|^2.$$

Utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$|\hat{\psi}(\xi')|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi',\xi_{d+1})|^2(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^s\mathrm{d}\xi_{d+1}\int_{\mathbb{R}}(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^{-s}\mathrm{d}\xi_{d+1}.$$

Dans l'intégrale ne comportant pas φ, on effectue le changement de variable $\xi_{d+1} = (1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}}u$. Il reste

$$|\hat{\psi}(\xi')|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi',\xi_{d+1})|^2(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^s\mathrm{d}\xi_{d+1}(1+|\xi'|^2)^{\frac{1}{2}-s}\int_{\mathbb{R}}(1+u^2)^{-s}\mathrm{d}u.$$

On remarque que la dernière intégrale converge bien par l'hypothèse $s > \frac{1}{2}$. On intègre alors en ξ' pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\psi}(\xi')|^2(1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi' \leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^s}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi',\xi_{d+1})|^2(1+|\xi'|^2+\xi_{d+1}^2)^s\mathrm{d}\xi_{d+1}\mathrm{d}\xi'.$$

On a alors l'inégalité (7.5) avec $C_s = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^s}$.

Cette inégalité implique que γ peut être prolongée par continuité de $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$ pour $s > \frac{1}{2}$. Pour ce faire, on considère $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$ convergeant vers u au sens de $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$. La suite $\gamma\varphi_j$ est une suite de Cauchy dans $H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$, qui converge car l'espace est de Hilbert. La limite ne dépend pas de la suite φ_j choisie ; on la note γu et cela définit le prolongement par continuité de γ à $H^s(\mathbb{R}^{d+1})$.

On remarque d'après nos calculs que l'on peut expliciter γ de la manière suivante :

$$\forall u \in H^s(\mathbb{R}^{d+1}),\ \gamma u = \mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^d}\mathcal{F}_{\xi_{d+1}}u(\xi',\xi_{d+1})\mathrm{d}\xi'\right), \tag{7.6}$$

où on a mis en indice de la transformée de Fourier la variable concernée.

Il nous reste à démontrer la surjectivité de l'application γ que l'on vient de construire. Soit donc $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. Notons $\xi' \mapsto g(\xi')$ la transformée de Fourier de v et définissons u, distribution sur $\mathbb{R}^{d+1}$, comme la transformée de Fourier inverse de la fonction f suivante,

$$\forall \xi = (\xi', \xi_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1},\ f(\xi) = k_N \frac{(1+|\xi'|^2)^N}{(1+|\xi|^2)^{N+\frac{1}{2}}} g(\xi').$$

On va choisir les constantes N et k_N de sorte que $\gamma u = v$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^{d+1})$. On veut donc montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} (1+|\xi|^2)^s |f(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi < +\infty \tag{7.7}$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(\xi', \xi_{d+1}) \mathrm{d}\xi_{d+1} = g(\xi'). \tag{7.8}$$

Par définition de f, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} (1+|\xi|^2)^s |f(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi'|^2)^{2N} |g(\xi')|^2 \mathrm{d}\xi' \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s-2N-1} \mathrm{d}\xi_{d+1}. \tag{7.9}$$

La seconde intégrale est finie dès lors que l'on choisit $N > \frac{s}{2} - \frac{1}{4}$, et elle est égale, après changement de variable, à une constante fois $(1+|\xi'|^2)^{s-2N-\frac{1}{2}}$. Le membre de droite de (7.9) est donc égal à une constante fois $\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi'|^2)^{2N} |g(\xi')|^2 \mathrm{d}\xi'$ dont la finitude exprime précisément l'hypothèse $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$. Nous avons donc établit (7.7) sous la condition $N > \frac{s}{2} - \frac{1}{4}$.

D'après l'expression de f, on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi', \xi_{d+1}) \mathrm{d}\xi_{d+1} = k_N (1+|\xi'|^2)^N g(\xi') \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{-N-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\xi_{d+1}.$$

L'intégrale de droite est égale à une constante $c_{N+\frac{1}{2}} := \int_{\mathbb{R}} (1+\lambda^2)^{-N-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\lambda$ multiplié par $(1+|\xi'|^2)^{-N}$. Il suffit donc de choisir $k_N = 2\pi (c_{N+\frac{1}{2}})^{-1}$ pour avoir (7.8). Cela démontre la surjectivité de γ.

□

Chapitre 8

Formule des sauts

8.1 Formule des sauts en dimension 1

Avant de traiter le cas compliqué, envisageons le cas de la dimension 1 d'espace. On se donne ainsi une fonction f, qui est de classe C^1 par morceaux dans $[a,b]$, et qui admet, en tout point où elle n'est pas continue, une limite à droite et une limite à gauche. Il existe ainsi une subdivision de $[a,b]$ en intervalles $[a,a_1[$, $]a_i,a_{i+1}[$, $]a_{i+1},b]$ telle que f soit de classe C^1 sur $]a_i,a_{i+1}[$. On note $f(a_i^+)$ et $f(a_i^-)$ les limites respectives à droite et à gauche au point a_i. Par convention, les points intérieurs à $[a,b]$ sont $a_1,..,a_n$ et on note $a_0=a, a_{n+1}=b$. La fonction f définit une distribution, dont on calcule la dérivée, que nous notons $(T_f)'$. Par définition, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$< (T_f)', \varphi >= - < T_f, \varphi' >= - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx.$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx.$$

Comme

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)dx = \varphi(a_{i+1})f(a_{i+1}^-) - \varphi(a_i)f(a_i^+) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx,$$

où la fonction f' est définie presque partout, on a la relation

$$-\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)dx + \sum_{i=0}^{n} f(a_i^+)\varphi(a_i) - f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1}).$$

Soit, en notant $T_{f'}$ la distribution définie par f' sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$

$$< (T_f)', \varphi >=< T_{f'}, \varphi > + (f(a^+) - 0) < \delta_a, \varphi > + (0 - f(b^-)) < \delta_b, \varphi > + \sum_{i=1}^{n} (f(a_i^+) - f(a_i^-)) < \delta_{a_i}, \varphi > .$$

On a ainsi démontré le théorème suivant.

Théorème 8.1.1. *La distribution $(T_f)'$ est donnée, à partir de $T_{f'}$ et des sauts de f, par*

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=0}^{n+1} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta_{a_i}.$$

avec les conventions $a_0 = a, a_{n+1} = b$, $f(a_0^-) = 0$, $f(a_{n+1}^+) = 0$.

Ce résultat s'étend aux dérivées successives, comme pour la dérivée seconde, en considérant les sauts de f et de la dérivée de f :

$$(T_f)'' = T_{f''} + \sum_{i=0}^{n+1}(f(a_i^+) - f(a_i^-))\delta'_{a_i} + \sum_{i=0}^{n+1}(f'(a_i^+) - f'(a_i^-))\delta_{a_i}.$$

On en déduit aussi la proposition :

Proposition 8.1.2. *Soit u une fonction C^1 définie sur un intervalle $[a,b]$. On la prolonge par 0 à l'extérieur de $[a,b]$ et on note le prolongement $\underline{u}$. De même, on note $\underline{u}'$ le prolongement de la fonction u', défini par u' sur $]a,b[$ et par 0 à l'extérieur. Alors*

$$(T_{\underline{u}})' = T_{\underline{u}'} + u(a)\delta_a - u(b)\delta_b.$$

Cette proposition est le cas particulier où la fonction u est de classe C^1 par morceaux d'un résultat plus général.

Proposition 8.1.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $g \in C(I)$, telle que sa dérivée au sens des distributions g' vérifie $g' \in L^1_{loc}(I)$. Si $a, b \in I$, $a < b$, alors :*

$$(T_{g1_{[a,b]}})' = T_{g'1_{[a,b]}} + g(a)\delta_a - g(b)\delta_b.$$

Nous avons ainsi trouvé la dérivée d'un prolongement par 0 en dimension 1.

8.2 Formule des sauts pour un demi-espace

On se donne une fonction $u(x', x_d)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$, et on souhaite calculer la dérivée de la distribution définie par $\underline{u}$ qui vaut u sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ et 0 sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_-$. On trouve ainsi

$$< \partial_{x_j}\underline{u}, \varphi >= -\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_0^\infty u(x', x_d)\partial_{x_j}\varphi(x', x_d)\mathrm{d}x_d\mathrm{d}x'$$

pour $1 \leq j \leq d$. Lorsque $j \neq d$, on a

$$\int_0^\infty u(x', x_d)\partial_{x_j}\varphi(x)\mathrm{d}x_d = \partial_{x_j}[\int_0^{+\infty} u(x', x_d)\varphi(x', x_d)\mathrm{d}x_d] - \int_0^{+\infty}\partial_{x_j}u(x', x_d)\varphi(x)\mathrm{d}x_d.$$

L'intégration du premier terme sur $\mathbb{R}$ dans la variable x_j donne 0 puisque φ est à support compact, ainsi on trouve, pour $j \neq d$

$$< \partial_{x_j}\underline{u}, \varphi >=< 1_{x_d \geq 0}\partial_{x_j}u, \varphi >$$

où on a noté par commodité $1_{x_d\geq 0}\partial_{x_j}u$ la distribution associée au prolongement par 0 sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_-$ de la fonction $\partial_{x_j}u$ définie sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*$. Cette distribution est définie par l'action de la fonction $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, égale à $\partial_{x_j}u$ sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+^*$ et à 0 sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_-^*$, sur la fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ égale à $1_{x_d\geq 0}\varphi(x', x_d)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Lorsque $j = d$, on trouve

$$\begin{aligned} < \partial_{x_d}\underline{u}, \varphi > &= -\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_0^\infty u(x', x_d)\partial_{x_d}\varphi(x', x_d)\mathrm{d}x_d\mathrm{d}x' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(x', 0)\varphi(x', 0)\mathrm{d}x' + \int_{\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_+}\partial_{x_d}u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient le résultat :

Proposition 8.2.1. *Soit u définie comme ci-dessus. Ses dérivées sont données par*

$$\forall j \in \{1, \dots d\},\ j \neq d,\ \partial_{x_j} \underline{u} = 1_{x_d \geq 0} \partial_{x_j} u$$

$$\text{et} \quad \partial_{x_d} \underline{u} = 1_{x_d \geq 0} \partial_{x_d} u + u(x', 0) \otimes \delta_{x_d = 0}.$$

La distribution $u(x', 0) \otimes \delta_{x_d=0}$ s'appelle distribution de simple couche. C'est une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, donnée par

$$< u(x', 0) \otimes \delta_{x_d=0}, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} u(x', 0) \varphi(x', 0) \mathrm{d}x'.$$

8.3 Ouverts réguliers dans $\mathbb{R}^d$

8.3.1 Définition

Définition 8.3.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit que Ω est de classe C^k s'il existe une fonction $\rho \in C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \rho(x) < 0\}$$

et, si $\partial\Omega$ désigne la frontière de Ω et $\nabla\rho(x)$ le gradient de ρ en x, alors

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ \rho(x) = 0 \text{ et } \nabla\rho(x) \neq 0\}.$$

Remarque 8.3.2. *Il n'y a pas a priori, pour un ouvert Ω de classe C^k, unicité du choix de la fonction ρ.*

Définition 8.3.3. *On appelle ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de classe C^∞.*

Cette définition assure en particulier que Ω est situé localement du même côté de sa frontière, propriété utile pour définir la normale extérieure à Ω en chaque point de $\partial\Omega$.

Exemple 8.3.4. *Pour $R > 0$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ |x| < R\}$ est un ouvert régulier. En effet, il suffit de prendre $\rho(x) = |x|^2 - R^2$. Il en est de même pour $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d,\ |x| > R\}$.*

Exemple 8.3.5. *Soit $\psi : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k. Posons*

$$\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d > \psi(x_1, \dots, x_{d-1})\}.$$

Alors Ω est un ouvert de classe C^k avec $\rho((x_1, \dots, x_d)) = \psi(x_1, \dots, x_{d-1}) - x_d$.

8.3.2 Vecteur normal unitaire sortant

Pour un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$, la direction du vecteur $\nabla\rho(x)$ pour $x \in \partial\Omega$ ne dépend pas du choix de la fonction ρ pour définir Ω (voir [8], page 41). Cela conduit à la définition de vecteur normal unitaire sortant.

Définition 8.3.6. *Pour $x \in \partial\Omega$, le vecteur $\nabla\rho(x)$ s'appelle le vecteur normal sortant à Ω au point x. Le vecteur*

$$\nu(x) = \frac{\nabla\rho(x)}{||\nabla\rho(x)||}$$

s'appelle le vecteur normal unitaire sortant à Ω au point $x \in \partial\Omega$.

On peut définir une notion de dérivée normale extérieure à Ω en posant

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = \left\langle \nu(x), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = \sum_{i=1}^{d} \nu_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Exemple 8.3.7. *Supposons que $\Omega =]0,1[\subset \mathbb{R}$. Alors Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}$ en prenant $\rho(x) = x(x-1)$. On a, $\partial\Omega = \{0,1\}$, $\nu(0) = -1$ et $\nu(1) = 1$.*

Exemple 8.3.8. *Pour $r > 0$, soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| < r\}$. L'ouvert Ω est un ouvert régulier et $\partial\Omega = S(0,r)$, la sphère centrée en 0 de rayon r de $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, pour $x \in S(0,r)$,*

$$\nu(x) = \left(\frac{x_1}{r}, \ldots, \frac{x_d}{r}\right) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial}{\partial\nu} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{d} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Exemple 8.3.9. *Soit $\psi : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Posons*

$$\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d > \psi(x_1, \ldots, x_{d-1})\}.$$

Alors Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ avec $\rho((x_1, \ldots, x_d)) = \psi(x_1, \ldots, x_{d-1}) - x_d$. De plus,

$$\partial\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d = \psi(x_1, \ldots, x_{d-1})\}$$

et

$$\forall x \in \partial\Omega,\ \nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla'\psi(x')|^2}} \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\psi(x') \\ \vdots \\ \partial_{x_{d-1}}\psi(x') \\ -1 \end{pmatrix}$$

où $x' = (x_1, \ldots, x_{d-1})$ et $\nabla'\psi$ désigne le gradient $d-1$ dimensionnel associé aux $d-1$ premières coordonnées de x, $(\partial_{x_1}\psi, \ldots, \partial_{x_{d-1}}\psi) \in \mathbb{R}^{d-1}$. Par ailleurs, on a

$$\frac{\partial}{\partial\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla'\psi(x')|^2}} \left(\sum_{i=1}^{d-1} \partial_{x_i}\psi\partial_{x_i} - \partial_{x_d}\right).$$

8.3.3 Mesure de surface, exemples

Soit un ouvert régulier Ω dans $\mathbb{R}^d$. On désigne par $\mathbb{1}_\Omega$ la fonction caractéristique de Ω. Commençons par déterminer dans quel ensemble se situe le support de la distribution $\partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega$.

Proposition 8.3.10. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $\mathrm{supp}\ (\partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega) \subset \partial\Omega$.*

Démonstration : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$B_\infty(x_0, \delta) = \left\{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ \max_{1\le i\le d} |x_i| < \delta\right\} \subset \mathbb{R}^d \setminus \partial\Omega.$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que supp $\varphi \subset B_\infty(x_0, \delta)$. On a, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,

$$< \partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega, \varphi >= - < \mathbb{1}_\Omega, \partial_{x_i}\varphi >= -\int_\Omega \partial_{x_i}\varphi \mathrm{d}x.$$

Si $x_0 \notin \Omega$, alors $B_\infty(x_0, \delta) \cap \Omega = \emptyset$ et l'intégrale précédente est nulle. Si $x_0 \in \Omega$, alors $B_\infty(x_0, \delta) \subset \Omega$ et par Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} < \partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega, \varphi > &= -\int_{B_\infty(x_0,\delta)} \partial_{x_i}\varphi \mathrm{d}x \\ &= -\int \cdots \int \left(\int_{x_{0,i}-\delta}^{x_{0,i}+\delta} \partial_{x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x_i \right) \mathrm{d}x' \\ &= -\int \cdots \int (0-0)\, \mathrm{d}x' = 0, \end{aligned}$$

puisque supp $\varphi \subset B_\infty(x_0, \delta)$. Dans les deux cas, $x_0 \notin$ supp $(\partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega)$. D'où l'inclusion voulue par passage au complémentaire.

□

Cette propriété nous conduit à poser la définition suivante.

Définition 8.3.11. *On appelle mesure de surface sur $\partial\Omega$, la mesure de Radon positive* $\mathrm{d}\sigma$ *définie par*

$$\mathrm{d}\sigma = -\frac{\partial}{\partial \nu}\mathbb{1}_\Omega.$$

On a alors,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < \mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_{\partial\Omega} \varphi(x)\mathrm{d}\sigma(x).$$

Remarque. Plus généralement, pour g sommable par rapport à $\mathrm{d}\sigma$ sur $\partial\Omega$, on définit $g\mathrm{d}\sigma$ la distribution de simple couche par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < g\mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_{\partial\Omega} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}\sigma(x).$$

Exemple 8.3.12. *On reprend $\Omega =]0,1[$. Alors, comme $\nu(0) = -1$ et $\nu(1) = 1$, on a*

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ < \mathrm{d}\sigma, \varphi > &= \left\langle -\frac{\partial}{\partial \nu}\mathbb{1}_{]0,1[}, \varphi \right\rangle \\ &= < \mathbb{1}_{]0,1[}, (\nu\varphi)' > \\ &= \int_0^1 (\nu\varphi)'(x)\mathrm{d}x \\ &= \nu(1)\varphi(1) - \nu(0)\varphi(0) = \varphi(1) + \varphi(0) =< \delta_1 + \delta_0, \varphi > . \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{d}\sigma = \delta_0 + \delta_1$. *C'est une somme de mesures de Dirac portées par $\{0\}$ et $\{1\}$.*

Exemple 8.3.13. *Soit $\Omega = B(0,r)$. On a, pour $x = (x_1, \dots x_d) \in S(0,r)$, $\nu(x) = (\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_d}{r})$. D'où, $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^d x_i \partial_{x_i}$. Or, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, en passant en coordonnées polaires, $x = t\theta$ avec $t \in [0, r[$ et $\theta \in S^{d-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, alors,*

$$t\partial_t(\varphi(t\theta)) = \sum_{i=1}^d t\theta_i \partial_{x_i}\varphi(t\theta) = \sum_{i=1}^d x_i \partial_{x_i}\varphi(x).$$

Utilisons cette expression pour calculer $\mathrm{d}\sigma$. *On a, pour toute* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
< \mathrm{d}\sigma, \varphi > &= \left\langle -\frac{1}{r}\sum_{i=1}^d x_i \partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega, \varphi \right\rangle = \frac{1}{r}\left\langle \mathbb{1}_\Omega, \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}(x_i\varphi)\right\rangle \\
&= \frac{1}{r}\left\langle \mathbb{1}_\Omega, \sum_{i=1}^d (\varphi + x_i\partial_{x_i}\varphi)\right\rangle \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r} \varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{|x|<r}\sum_{i=1}^d x_i\partial_{x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r} \varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_0^r\int_{S^{d-1}} t\partial_t(\varphi(t\theta))t^{d-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r} \varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{S^{d-1}}\left(\int_0^r \partial_t(\varphi(t\theta))t^d\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r} \varphi(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{S^{d-1}}\left(\Big[\varphi(t\theta)t^d\Big]_0^r - \int_0^r \varphi(t\theta)\cdot dt^{d-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{d}{r}\int_{|x|<r} \varphi(x)\mathrm{d}x + r^{d-1}\int_{S^{d-1}}\varphi(r\theta)\mathrm{d}\theta - \frac{d}{r}\int_0^r\int_{S^{d-1}}\varphi(t\theta)\cdot t^{d-1}\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{S^{d-1}} \varphi(r\theta)r^{d-1}\mathrm{d}\theta. \qquad (8.1)
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité définit la mesure de surface $\mathrm{d}\sigma$ *sur la boule de centre* 0 *et de rayon* $r > 0$ *:*

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ < \mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_{S^{d-1}} \varphi(r\theta)r^{d-1}\mathrm{d}\theta.$$

Exemple 8.3.14. *On reprend l'exemple de l'ouvert régulier*

$$\Omega = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d > \psi(x_1, \ldots, x_{d-1})\}.$$

où $\psi : \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ *est une fonction de classe* C^∞. *Soit* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Posons* $D(x') = \sqrt{1+|\nabla'\psi(x')|^2}$. *Alors,*

$$< \mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_\Omega \sum_{i=1}^{d-1}\partial_{x_i}\left(\frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)\varphi(x)\right)\mathrm{d}x - \int_\Omega \partial_{x_d}\left(\frac{1}{D(x')}\varphi(x)\right)\mathrm{d}x := I_1 - I_2.$$

On a

$$I_1 = \sum_{i=1}^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{\psi(x')}^{+\infty}\partial_{x_i}\left(\frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)\varphi(x)\right)\mathrm{d}x_d\mathrm{d}x'$$

et

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{\psi(x')}^{+\infty}\partial_{x_d}\left(\frac{1}{D(x')}\varphi(x)\right)\mathrm{d}x_d\mathrm{d}x' = -\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{1}{D(x')}\varphi(x', \psi(x'))\mathrm{d}x'.$$

Or, pour $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ *et* $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\partial_{x_i}\int_{\psi(x')}^{+\infty}\theta(x', x_d)\mathrm{d}x_d = \int_{\psi(x')}^{+\infty}\partial_{x_i}\theta(x', x_d)\mathrm{d}x_d - (\partial_{x_i}\psi)\theta(x', \psi(x')).$$

On en déduit, en prenant $\theta : x \mapsto \frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)\varphi(x)$,

$$I_1 = \sum_{i=1}^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)^2\varphi(x', \psi(x'))\mathrm{d}x' + \sum_{i=1}^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\partial_{x_i}\left(\int_{\psi(x')}^{+\infty}\frac{1}{D(x')}(\partial_{x_i}\psi)\varphi(x', \psi(x'))\mathrm{d}x_d\right)\mathrm{d}x'.$$

Comme φ est à support compact, elle est nulle pour $x_i = \pm\infty$, de sorte que le deuxième terme du membre de droite est nul. On en déduit :

$$< \mathrm{d}\sigma, \varphi >= I_1 - I_2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{D(x')}(1 + |\nabla\psi(x')|^2)\varphi(x', \psi(x'))\mathrm{d}x'.$$

Finalement, on obtient la formule qui donne la mesure de surface sur $\partial\Omega$:

$$< \mathrm{d}\sigma, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi(x', \psi(x'))\sqrt{1 + |\nabla\psi(x')|^2}\mathrm{d}x'.$$

8.4 Formule de Stokes

8.4.1 Formule de Stokes

Nous commençons par préciser la proposition 8.3.10.

Proposition 8.4.1. *Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ et soit ν le champ de vecteur normal sortant à Ω (i.e., l'application $x \mapsto \nu(x)$). Si $\mathrm{d}\sigma$ désigne la mesure de surface sur $\partial\Omega$, alors, pour tout $i \in \{1, \ldots d\}$,*

$$\nu_i \mathrm{d}\sigma = -\partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega.$$

Démonstration : Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction marche telle que $0 \le \chi \le 1$, $\chi(x) = 1$ si $x \le -1$ et $\chi(x) = 0$ pour $x \ge 0$. Soit aussi $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui définit l'ouvert régulier Ω. Pour $\alpha > 0$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \chi_\alpha(x) = \chi(\alpha\rho(x)).$$

Si $x \notin \Omega$, alors $\chi_\alpha(x) = 0$ puisque $\rho(x) \ge 0$. Si $x \in \Omega$, $\chi_\alpha(x) = 1$ pour α tel que $\alpha\rho(x) \le -1$, ce qui est toujours possible, quitte à choisir α assez grand. De plus, puisque $\chi_\alpha \le 1$, par le TCD,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\alpha(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} \int_\Omega \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Cela se traduit par le fait que la famille $(T_{\chi_\alpha})_{\alpha>0}$ converge vers $\mathbb{1}_\Omega$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ lorsque α tend vers l'infini.

Par continuité des opérations de dérivation et de multiplication par une fonction C^∞ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, on a aussi

$$\forall i \in \{1, \ldots, d\},\ -\nu_i \sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k} \chi_\alpha \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} -\nu_i \sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k} \mathbb{1}_\Omega = \nu_i \left(-\frac{\partial}{\partial\nu} \mathbb{1}_\Omega \right) = \nu_i \mathrm{d}\sigma$$

avec convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont on suppose que le support contient un voisinage de $\partial\Omega$. On a

$$\begin{aligned}
\left\langle -\nu_i \sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k} \chi_\alpha, \varphi \right\rangle &= \left\langle -\sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k} \chi_\alpha, \nu_i \varphi \right\rangle \\
&= -\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \chi'(\alpha\rho(x)) \sum_{k=1}^d \partial_{x_k}\rho(x)\nu_k(x)\nu_i(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=1}^d \partial_{x_k}\rho(x)\nu_k(x) = ||\nabla\rho(x)||$, d'où

$$\begin{aligned}
\left\langle -\nu_i \sum_{k=1}^d \nu_k \partial_{x_k} \chi_\alpha, \varphi \right\rangle &= -\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \chi'(\alpha\rho(x))||\nabla\rho(x)||\nu_i(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \chi'(\alpha\rho(x))\partial_{x_i}\rho(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_i}(\chi_\alpha(x))\varphi(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En faisant tendre α vers l'infini dans cette dernière égalité et en utilisant les résultats précédents, on obtient,

$$< \nu_i \mathrm{d}\sigma, \varphi >= - < \partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega, \varphi > .$$

En effet, $(T_{\chi_\alpha})_{\alpha>0}$ converge vers $\mathbb{1}_\Omega$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ donc $(\partial_{x_i} T_{\chi_\alpha})_{\alpha>0} = (T_{\partial_{x_i}\chi_\alpha})_{\alpha>0}$ (puisque χ_α est C^∞ donc C^1) converge vers $\mathbb{1}_\Omega$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On a donc bien montré que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $\nu_i \mathrm{d}\sigma = -\partial_{x_i}\mathbb{1}_\Omega$.

□

Avant d'énoncer le théorème de Stokes nous donnons une notation qui est justifiée par le résultat suivant que l'on ne démontre pas.

Proposition 8.4.2. *Soient Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$ borné et soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Soit f continue sur $\overline{\Omega}$. Alors, les deux propriétés sont équivalentes :*

1. *f est de classe C^k dans Ω et les dérivées de f jusqu'à l'ordre k se prolongent continûment à $\overline{\Omega}$.*
2. *Il existe une fonction appartenant à $C^k(\mathbb{R}^d)$ qui coïncide avec f sur $\overline{\Omega}$.*

On dit alors que f est de classe C^k jusqu'au bord de Ω et on note $f \in C^k(\overline{\Omega})$ si ces conditions sont vérifiées.

Pour $X = (X_1, \ldots, X_d)$ un champ de vecteur dont les composantes $X_i \in C^1(\overline{\Omega})$, on rappelle la définition de la divergence :

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} X_i.$$

Théorème 8.4.3 (Formule de Stokes)**.** *Soit Ω un ouvert borné régulier et X un champ de vecteur défini sur $\overline{\Omega}$ et dont les composantes $X_i \in C^1(\overline{\Omega})$. Alors,*

$$\int_{\partial\Omega} X \cdot \nu \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \operatorname{div} X \, \mathrm{d}x,$$

où, en tout point de $x \in \partial\Omega$, $X(x) \cdot \nu(x)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$ des deux vecteurs.

Démonstration : D'après la Proposition 8.4.1, on a

$$\begin{aligned} < \mathrm{d}\sigma, X \cdot \nu > &= \left\langle \mathrm{d}\sigma, \sum_{i=1}^{d} \nu_i X_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{d} < \nu_i \mathrm{d}\sigma, X_i > \\ &= -\sum_{i=1}^{d} < \partial_{x_i} \mathbb{1}_\Omega, X_i > \\ &= \left\langle \mathbb{1}_\Omega, \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} X_i \right\rangle \\ &= < \mathbb{1}_\Omega, \operatorname{div} X > . \end{aligned}$$

D'où la formule de Stokes.

□

8.4.2 Intégration par parties multidimensionnelle

Nous déduisons du théorème de Stokes un théorème d'intégration par parties multidimensionnelle.

Corollaire 8.4.4 (IPP). *Soient Ω un ouvert régulier et soit u et v dans $C^1(\overline{\Omega})$. On a, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,*

$$\int_\Omega v(x)\partial_{x_i}u(x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\nu_i(x)\mathrm{d}\sigma(x) - \int_\Omega u(x)\partial_{x_i}v(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la formule de Stokes au champ de vecteur $X \ : \ x \mapsto u(x)v(x)e_i$ où e_i est le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

□

Exemple 8.4.5. *Appliquons cette formule à l'ouvert $\Omega =]0,1[$. La mesure de surface de $\partial\Omega$ est $\mathrm{d}\sigma = \delta_0 + \delta_1$. On a alors, pour u et v dans $C^1(\overline{\Omega})$,*

$$\begin{aligned}\int_0^1 v(x)u'(x)\mathrm{d}x &= <\delta_0+\delta_1, u\cdot v\cdot\nu> - \int_0^1 v'(x)u(x)\mathrm{d}x \\ &= u(1)v(1) - u(0)v(0) - \int_0^1 v'(x)u(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

puisque $\nu(0) = -1$ et $\nu(1) = 1$. On retrouve exactement la formule d'intégration par parties habituelle en dimension 1.

8.4.3 Formule de Green pour le laplacien

On peut aussi retrouver la formule de Green pour la Laplacien.

Corollaire 8.4.6. *Soient Ω un ouvert régulier et soient u et v dans $C^2(\overline{\Omega})$. On a,*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

Démonstration : On applique la formule de Stokes au champ de vecteurs $u\nabla v$. On obtient :

$$\int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla v + u\Delta v)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(\nabla v\cdot\nu)\mathrm{d}\sigma.$$

Puis on retranche la formule symétrique en u et v pour avoir le résultat.

□

8.4.4 Formule des sauts multidimensionnelle

Soit Ω un ouvert régulier borné et soit Ω^c le complémentaire de $\overline{\Omega}$. Soit $\underline{u}$ une fonction définie dans $\mathbb{R}^d$ telle que ses restricitions u et u^c à Ω et Ω^c se prolongent par continuité en des éléments de $C^1(\overline{\Omega})$ et $C^1(\overline{\Omega^c})$. Pour $x \in \partial\Omega$, on notera $u_{\text{int}}(x)$ et $u_{\text{ext}}(x)$ les valeurs respectives de ces prolongements.

Théorème 8.4.7 (Formule des sauts). *Avec les notations ci-dessus, on a, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,*

$$\partial_{x_i}T_{\underline{u}} = T_{\partial_{x_i}u} + T_{\partial_{x_i}u^c} + (u_{\text{ext}} - u_{\text{int}})(\nu(\cdot).e_i)\mathrm{d}\sigma$$

où $(u_{\text{ext}} - u_{\text{int}})\nu(\cdot).e_i\mathrm{d}\sigma$ est la mesure de Radon dont la densité par rapport à $\mathrm{d}\sigma$ est $x \mapsto (u_{\text{ext}}(x) - u_{\text{int}}(x))\nu(x).e_i$.

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit $i \in \{1, \ldots, d\}$. On applique la formule d'intégration par parties dans $\overline{\Omega}$ au produit de φ par le prolongement par continuité de u à $\overline{\Omega}$. On obtient

$$-\int_\Omega \underline{u}(x)\partial_{x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi(x)\partial_{x_i}u(x)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u_{\mathrm{int}}(x)\nu(x) \cdot e_i\mathrm{d}\sigma.$$

Puis, on applique la formule d'intégration par parties dans $\overline{\Omega^c}$ au produit de φ par le prolongement par continuité de u^c à $\overline{\Omega^c}$. On obtient

$$-\int_{\Omega^c} \underline{u}(x)\partial_{x_i}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega^c} \varphi(x)\partial_{x_i}u^c(x)\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \varphi(x)u_{\mathrm{ext}}(x)(-\nu(x)) \cdot e_i\mathrm{d}\sigma.$$

La somme des membres de gauche vaut par définition $< \partial_{x_i}T_{\underline{u}}, \varphi >$. La somme des premiers termes des membres de droite donne $< T_{\partial_{x_i}u} + T_{\partial_{x_i}u^c}, \varphi >$ et la somme des termes restant vaut :

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(x)(u_{\mathrm{ext}}(x) - u_{\mathrm{int}}(x))\nu(x) \cdot e_i\mathrm{d}\sigma = \langle (u_{\mathrm{ext}} - u_{\mathrm{int}})\nu \cdot e_i\mathrm{d}\sigma, \varphi \rangle .$$

□

8.5 Applications

8.5.1 Les relations de Rankine-Hugoniot

On considère le système d'équations d'Euler conservatives, modélisant l'écoulement instationnaire d'un fluide de densité ponctuelle ρ, de vitesse u, de pression p et d'énergie e, qui sont des "fonctions" de $x \in \mathbb{R}$ et de t. Ainsi

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0 \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0. \end{cases} \tag{8.2}$$

On suppose que le fluide est traversé par un choc de vitesse σ, c'est-à-dire qu'il y a par exemple, discontinuité de la densité au travers de la courbe dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $x - \sigma t = 0$. On désignera par f^+ la limite de $f(x, t)$ pour $x - \sigma t \to 0, x - \sigma t > 0$ et par f^- la limite de $f(x, t)$ pour $x - \sigma t \to 0, x - \sigma t < 0$.
On veut trouver des relations entre les valeurs de ρ, u, e, p avant et après le choc, en fonction de σ. On intègre contre la fonction $1_{x\in[\sigma t-\varepsilon, \sigma t+\varepsilon]}$ l'équation $\partial_t\rho + \partial_x(\rho u) = 0$. On obtient :

$$\int_{\sigma t-\varepsilon}^{\sigma t+\varepsilon} (\partial_t\rho + \partial_x(\rho u))dx = 0.$$

On note $\tilde{\rho}(X, t) = \rho(X + \sigma t, t)$, la densité liée au choc. On trouve

$$\partial_t\tilde{\rho} = \sigma\partial_x\rho(X + \sigma t, t) + \partial_t\rho(X + \sigma t, t).$$

On obtient alors

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_t\rho(X + \sigma t, t)dX + \sigma[\rho(\sigma t + \varepsilon, t) - \rho(\sigma t - \varepsilon, t)] = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_t\tilde{\rho}(X + \sigma t, t)dX.$$

Ainsi, on obtient

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_t\tilde{\rho}(X + \sigma t, t)dX - \sigma[\rho(\sigma t + \varepsilon, t) - \rho(\sigma t - \varepsilon, t)] + (\rho u)(\sigma t - \varepsilon, t) - (\rho u)(\sigma t - \varepsilon, t) = 0.$$

Nous faisons l'hypothèse que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial_t \tilde{\rho}(X+\sigma t, t) dX$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0. On en tire, appliquant ce même raisonnement pour toutes les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(\rho^+ - \rho^-) = (\rho u)^+ - (\rho u)^- \\ \sigma((\rho u)^+ - (\rho u)^-) = (\rho u^2 + p)^+ - (\rho u^2 + p)^- \\ \sigma((\rho e)^+ - (\rho e)^-) = (\rho u e + p u)^+ - (\rho u e + p u)^- \end{array} \right. \tag{8.3}$$

Nous pouvons à présent donner une justification plus générale du résultat que l'on vient d'énoncer. On suppose que l'on étudie un système conservatif du type :

$$\partial_t U + \partial_x (F(U)) = 0.$$

On suppose que, dans l'espace (x,t), il existe une solution de classe C^1 pour $x - \sigma t < 0$ notée U_1 et une solution de classe C^1 pour $x - \sigma t > 0$ notée U_2. On peut alors poser :

$$V(x,t) = U_1(x,t) + (U_2(x,t) - U_1(x,t)) H(x - \sigma t).$$

Cette fonction coïncide avec U_1 pour $x < \sigma t$ et avec U_2 pour $x > \sigma t$. Ainsi, $\partial_t V + \partial_x (F(V))$ est nulle pour $x \neq \sigma t$. On vérifie alors par la formule des sauts que :

$$\partial_t V = \partial_t U_1 + (\partial_t U_2 - \partial_t U_1) H(x - \sigma t) - \sigma \delta_{x - \sigma t = 0} (U_2(\sigma t, t) - U_1(\sigma t, t)).$$

De même, par la formule des sauts appliquée à $F(V)$, on a :

$$\partial_x (F(V)) = \partial_x (F(U_1)) + (\partial_x (F(U_2)) - \partial_x (F(U_1))) H(x - \sigma t) + (F(U_2(\sigma t, t)) - F(U_1(\sigma t, t))) \delta_{x - \sigma t = 0}.$$

Il vient ainsi

$$\partial_t V + \partial_x (F(V)) = (F(U_2(\sigma t, t)) - F(U_1(\sigma t, t)) - \sigma (U_2(\sigma t, t) - U_1(\sigma t, t))) \delta_{x - \sigma t = 0}.$$

Si on veut que V soit une solution de l'équation convervative au sens des distributions, il faut que $F(U_2) - F(U_1) = \sigma (U_2 - U_1)$ sur la surface de discontinuité $x = \sigma t$.

8.5.2 Équation des ondes en dimension 3

On note $(t, \vec{r}) = (t, x, y, z)$ les coordonnées d'un point de l'espace-temps et $\Box = \partial_t^2 - \Delta_r$ le d'Alembertien.

On note Γ la surface du cône d'avenir définie par $t = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Bien que Γ ne soit pas une surface régulière à l'origine, on peut tout de même définir sa mesure de surface par

$$\int_\Gamma f \mathrm{d}\sigma = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}^3} f(r, \vec{r}) \mathrm{d}\vec{r},$$

pour f définie sur Γ, continue et à support compact.

Enfin, si on note $\rho = \sqrt{t^2 + r^2}$, alors la distribution de simple couche $\frac{\mathrm{d}\sigma}{4\pi\rho}$ est une solution élémentaire de l'équation des ondes, $\Box u = f$. Il s'agit d'une mesure de Radon positive bien définie : en remarquant que, sur Γ, $\rho = r\sqrt{2}$, on a :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4),\ \left\langle \frac{\mathrm{d}\sigma}{4\pi\rho}, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(r, \vec{r})}{4\pi r} \mathrm{d}\vec{r}.$$

La fonction $1/r$ étant localement intégrable dans $\mathbb{R}^3$, l'intégrale de droite est finie et la forme linéaire est bien définie et positive.

Nous dirons qu'une distribution u sur $\mathbb{R}^4$ est nulle dans le passé s'il existe $T_0 \in \mathbb{R}$ tel que le support de u soit inclus dans $[T_0, +\infty[\times\mathbb{R}^3$. Alors, si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ est nulle dans le passé, il existe une et une seule solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ de $\Box u = f$ qui soit nulle dans le passé. Il s'agit de la distribution

$$u = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{4\pi\rho}\right) \star f.$$

Le support de u est contenu dans l'ensemble des $(t, \vec{r})$ tels qu'il existe $(t_0, \vec{r}_0) \in \operatorname{supp} f$ avec $t \geq t_0$ et $t - t_0 = ||\vec{r} - \vec{r}_0||$.

Chapitre 9

Convolution des distributions

9.1 Dérivation et intégration sous le crochet

Nous allons commencer par démontrer deux résultats utiles pour la suite qui sont les analogues dans la théorie des distributions des théorèmes classiques de dérivation et d'intégration sous le signe intégral.

Proposition 9.1.1 (Dérivation sous le crochet). *Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^q \times \mathbb{R}_y^d)$ et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^q$, $\operatorname{supp}\ \phi(x,\cdot) \subset \Omega$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^q$, $u(x) =< T, \phi(x,\cdot) >$. Alors, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ et on a*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^q,\ \forall x \in \mathbb{R}^q,\ \partial^\alpha u(x) =< T, \partial_x^\alpha \phi(x,\cdot) > .$$

Démonstration : Soient $x_0 \in \mathbb{R}^q$ et $y \in \mathbb{R}^d$. Pour $h \in \mathbb{R}^q$, la formule de Taylor à l'ordre 1 nous donne :

$$\phi(x_0+h,y) = \phi(x_0,y) + \sum_{j=1}^q \partial_{x_j}\phi(x_0,y)h_j + R(x_0,y,h),$$

avec

$$R(x_0,y,h) = 2\sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)\partial_x^\alpha \phi(x_0+th,y)\mathrm{d}t.$$

Comme $y \mapsto R(x_0,y,h)$ est de classe C^∞ à support dans $\operatorname{supp}\ \phi(x_0,\cdot)$ et puisque T est une distribution sur Ω, il existe $C>0$ et $m \in \mathbb{N}$ indépendants de x_0 et h tels que

$$| < T, R(x_0,y,h) > | \leq C \sum_{|\beta|\leq m} ||\partial_x^\beta R(x_0,\cdot,h)||_\infty.$$

Or, pour $|h| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |\partial_y^\beta R(x_0,y,h)| &\leq 2\sum_{|\alpha|\leq 2}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)\partial_y^\beta\partial_x^\alpha\phi(x_0+th,y)\mathrm{d}t \\ &\leq C|h|^2 \sum_{|\alpha|\leq 2}\ \sup_{(x,y)\in\overline{B(0,1)}\times \operatorname{supp}\ \phi(x_0,\cdot)} |\partial_y^\beta\partial_x^\alpha\phi(x,y)|. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$| < T, R(x_0,y,h) > | = \mathcal{O}(|h|^2)$$

et finalement

$$u(x_0+h) = u(x_0) + \sum_{j=1}^q < T, \partial_{x_j}\phi(x_0,y) > h_j + \mathcal{O}(|h|^2).$$

Cela prouve que u est différentiable par rapport à x et que l'on a

$$\partial_{x_i} u(x) =< T, \partial_{x_i}\phi(x,y) > .$$

Comme cela est valable pour tout i, on en déduit de plus que u est de classe C^1. On obtient ensuite le résultat pour α quelconque par récurrence.

□

Proposition 9.1.2 (Intégration sous le crochet)**.** *Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^q \times \mathbb{R}_y^d)$ et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^q$, $\operatorname{supp}\,\phi(x,\cdot) \subset \Omega$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^q$, $u(x) =< T, \phi(x,\cdot) >$. Alors, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ et on a*

$$\int_{\mathbb{R}^q} u(x)\mathrm{d}x = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^q} \phi(x,\cdot)\mathrm{d}x \right\rangle.$$

Démonstration : On commence par démontrer la proposition dans le cas où $q = 1$. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^q \times \mathbb{R}_y^d)$. On choisit $A > 0$ et un compact $K \subset \Omega$ de sorte que $\operatorname{supp}\,\phi \subset [-A, A] \times K$. Soit alors $\psi : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\psi(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t,y)\mathrm{d}t.$$

Alors $\psi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \Omega)$ et, pour tout x fixé, le support de $y \mapsto \psi(x,y)$ est inclus dans K. Alors, par la proposition 9.1.1, la fonction

$$u :\; x \mapsto < T, \psi(x,y) >= \left\langle T, \int_{-\infty}^{x} \phi(t,y)\mathrm{d}t \right\rangle$$

est de classe C^∞ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\; u'(x) =< T, \partial_x \psi(x,y) >=< T, \phi(x,y) > .$$

En intégrant cette dernière relation, on obtient :

$$\left\langle T, \int_{-\infty}^{x} \phi(t,y)\mathrm{d}t \right\rangle = u(x) = \int_{-\infty}^{x} u'(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} < T, \phi(t,y) > \mathrm{d}t.$$

En prenant $x = A$ par exemple, on obtient alors la proposition dans le cas $q = 1$.

Pour $q > 1$ on procède par intégrations successives. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^q \times \Omega)$. Soit $A > 0$ tel que $\operatorname{supp}\,\phi \subset [-A, A]^q \times K$ pour un compact $K \subset \Omega$. On définit alors $\psi_q : \mathbb{R}^q \times \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$\forall (x', x_q, y) \in \mathbb{R}^{q-1} \times \mathbb{R} \times \Omega,\; \psi_q(x', x_q, y) = \int_{-\infty}^{x_q} \phi(x', t, y)\mathrm{d}t.$$

Par le résultat pour $q = 1$, on a

$$\left\langle T, \int_{\mathbb{R}} \phi(x', t, y)\mathrm{d}t \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} < T, \phi(x', t, y) > \mathrm{d}t.$$

Puis, on définit $\psi_{q-1} : \mathbb{R}^{q-1} \times \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$\forall (x', x_{q-1}, y) \in \mathbb{R}^{q-2} \times \mathbb{R} \times \Omega,\; \psi_{q-1}(x', x_q, y) = \int_{-\infty}^{x_{q-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(x', t_1, t_2, y)\mathrm{d}t_1 \right) \mathrm{d}t_2.$$

On a alors,

$$\begin{aligned}
< T, \psi_{q-1}(x', x_{q-1}, y) > &= \int_{-\infty}^{x_{q-1}} < T, \int_{\mathbb{R}} \phi(x', t, t_1, y) \mathrm{d}t_1 > \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{x_{q-1}} \int_{\mathbb{R}} < T, \phi(x', t, t_1, y) \mathrm{d}t_1 > \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

La fin de la démonstration se fait alors par récurrence.

□

9.2 Produit tensoriel de deux distributions

Nous commençons par un petit calcul dans le cadre des fonctions classiques. Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts respectivement de $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$. Pour $j = 1, 2$, soit $u_j \in C^0(\Omega_j)$. On définit alors la fonction $u_1 \otimes u_2$ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ par

$$\forall (x_1, x_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2,\ (u_1 \otimes u_2)(x_1, x_2) = u_1(x_1) u_2(x_2).$$

Alors, $u_1 \otimes u_2 \in C^0(\Omega_1 \times \Omega_2)$ et si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$, on a, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
< u_1 \otimes u_2, \varphi > &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} u_1(x_1) u_2(x_2) \varphi(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} u_1(x_1) \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} u_2(x_2) \varphi(x_1, x_2) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= < u_1, < u_2, \varphi(x_1, \cdot) >> .
\end{aligned}$$

En particulier, si φ est à variables séparées, *i.e.*, il existe pour $j = 1, 2$, $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ telles que $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2)$, on a :

$$< u_1 \otimes u_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >=< u_1, \varphi_1 > \cdot < u_2, \varphi_2 > .$$

Nous allons dans la suite généraliser ce calcul au cas des distributions.

Théorème 9.2.1. *Soient $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Il existe une unique distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ telle que, pour toutes fonctions $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, on ait*

$$< T, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >=< T_1, \varphi_1 > \cdot < T_2, \varphi_2 > .$$

De plus, pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$,

$$< T, \varphi >=< T_1, < T_2, \varphi(x_1, \cdot) >>=< T_2, < T_1, \varphi(\cdot, x_2) >> .$$

Si les T_j sont de plus à support compact on a les mêmes formules pour $\varphi \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$. On écrit alors $T = T_1 \otimes T_2 = T_2 \otimes T_1$ et T s'appelle le produit tensoriel des distributions T_1 et T_2.

Démonstration : Notons $\psi : x_1 \mapsto < T_2, \varphi(x_1, \cdot) >$. Alors par la dérivation sous le crochet ψ est une fonction dans $C_0^\infty(\Omega_1)$.
On pose $< T, \varphi >=< T_1, \psi >$ et on prouve que c'est bien une distribution dans $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$. En effet, en appliquant sucessivement la caractérisation d'une distribtion à T_1 puis T_2, on obtient pour tout compact $K = K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, l'existence de constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ ainsi que d'entiers m_1 et m_2 tels que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ avec supp $\varphi \subset K$,

$$| < T, \varphi > | = | < T_1, \psi > | \leq C_1 \max_{|\alpha| \leq m_1} || < T_2, \partial_x^\alpha \varphi(x, \cdot) ||_{\infty, x} \leq C_1 C_2 \max_{|\alpha| \leq m_1, |\beta| \leq m_2} || \partial_y^\beta \partial_x^\alpha \varphi(x, y) ||_\infty.$$

Donc T est bien une distribution dans $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Puis on utilise la densité de $C_0^\infty(\Omega_1) \otimes C_0^\infty(\Omega_2)$ dans $C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$ pour prouver l'unicité (voir [8], Chapitre 1, Proposition 3.7). Enfin on montre l'égalité avec $< T_1, \varphi_1 > \cdot < T_2, \varphi_2 >$ en utilisant l'unicité puisque cette autre distribution vérifie aussi la propriété voulue.

□

Le produit tensoriel se comporte bien vis-à-vis des opérations sur les distributions.

Proposition 9.2.2. *Soient $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Soient $a \in C^\infty(\Omega_1)$ et $b \in C^\infty(\Omega_2)$. Alors :*

1. *$(a \otimes b)(T_1 \otimes T_2) = (aT_1) \otimes (bT_2)$.*
2. *Pour tout $j \in \{1, \ldots, d_1\}$, $\partial_j(T_1 \otimes T_2) = (\partial_j T_1) \otimes T_2$ et pour tout $j \in \{d_1 + 1, \ldots, d_1 + d_2\}$, $\partial_j(T_1 \otimes T_2) = T_1 \otimes (\partial_j T_2)$.*

Démonstration : Calcul direct dans les deux cas, où l'on prend $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ puis on utilise la définition du produit tensoriel.

□

Proposition 9.2.3. *Si $(T_n)_{n\geq 0}$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ et si $(S_n)_{n\geq 0}$ converge vers S dans $\mathcal{D}'(\Omega_2)$, alors $(T_n \otimes S_n)_{n\geq 0}$ converge vers $T \otimes S$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$.*

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Soit $K = K_1 \times K_2$ un compact de $\Omega_1 \times \Omega_2$ tel que supp $\varphi \subset K$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n : x \mapsto < S_n, \varphi(x, \cdot) >$. Alors ψ_n est de classe C^∞ sur Ω_1 par la dérivation sous le crochet et on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{d_1},\ \forall x \in \Omega_1,\ \partial^\alpha \psi_n(x) = < S_n, \partial_x^\alpha \varphi(x, \cdot) > .$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, supp $\psi_n \subset K_1$. Posons $\psi : x \mapsto < S, \varphi(x, \cdot) >$ et montrons que $\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \psi$ dans $C_0^\infty(\Omega_1)$. Il nous reste donc à prouver que, pour tout α, $(\partial^\alpha \psi_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers $\partial^\alpha \psi$ sur K_1.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de K_1 qui converge vers $x \in K_1$. On a :

$$\partial^\alpha \psi_n(x_n) = < S_n, \partial_x^\alpha \varphi(x_n, \cdot) > \quad \text{et} \quad \partial_x^\alpha \varphi(x_n, \cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{} \partial_x^\alpha \varphi(x, \cdot) \text{ dans } C_0^\infty(\Omega_2).$$

En effet, supp $(\partial_x^\alpha \varphi(x_n, \cdot)) \subset K_2$ et puisque $\partial_y^\beta \partial_x^\alpha \varphi$ est de classe C^1 et à support compact, par les accroissements finis,

$$\exists C > 0,\ \forall y \in K_2,\ |\partial_y^\beta \partial_x^\alpha \varphi(x_n, y) - \partial_y^\beta \partial_x^\alpha \varphi(x, y)| \leq C|x_n - x|.$$

Il vient,

$$\partial^\alpha \psi_n(x_n) - \partial^\alpha \psi(x) = < S_n, \partial_x^\alpha \varphi(x_n, \cdot) - \partial_x^\alpha \varphi(x, \cdot) > \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Enfin, comme $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$, on a $T_n(\psi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} T(\psi)$, ce qui termine notre démonstration.

□

Proposition 9.2.4. *Soient $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Alors,*

$$\text{supp } (T_1 \otimes T_2) = \text{supp } T_1 \times \text{supp } T_2$$

Démonstration : Soit $y_0 \notin \text{supp } T_2$. Il existe un voisinage V de y_0 tel que, pour toute $\psi \in C_0^\infty(V)$, $< T_2, \psi >= 0$. Alors, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d_1} \times V)$ on a :

$$< T_1 \otimes T_2, \varphi >=< T_1, < T_2, \varphi(x, \cdot) > >=< T_1, 0 >= 0,$$

ce qui démontre que supp $(T_1 \otimes T_2) \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \text{supp } T_2$. De même, on démontre que supp $(T_1 \otimes T_2) \subset \text{supp } T_1 \times \mathbb{R}^{d_2}$. Ainsi,

$$\text{supp } (T_1 \otimes T_2) \subset (\text{supp } T_1 \times \mathbb{R}^{d_2}) \cap (\mathbb{R}^{d_1} \times \text{supp } T_2) = \text{supp } T_1 \times \text{supp } T_2.$$

Pour montrer l'inclusion réciproque, prenons $(x_0, y_0) \in \text{supp } T_1 \times \text{supp } T_2$. Soit W un voisinage de (x_0, y_0) et soient U et V des voisinages respectifs de x_0 et y_0 tels que $U \times V \subset W$. Comme $x_0 \in \text{supp } T_1$, il existe $\varphi_1 \in C_0^\infty(U)$ telle que $< T_1, \varphi_1 >\neq 0$. Comme $y_0 \in \text{supp } T_2$, il existe $\varphi_2 \in C_0^\infty(V)$ telle que $< T_2, \varphi_2 >\neq 0$. Alors, $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \in C_0^\infty(W)$ et on a :

$$< T_1 \otimes T_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 >=< T_1, \varphi_1 > \cdot < T_2, \varphi_2 >\neq 0.$$

On a bien démontré que $(x_0, y_0) \in \text{supp } (T_1 \otimes T_2)$.

□

Exemple 9.2.5. *Soient $a_1 \in \Omega_1$ et $a_2 \in \Omega_2$. Alors, $\delta_{a_1} \otimes \delta_{a_2} = \delta_{(a_1, a_2)}$.*

Exemple 9.2.6. *Les monômes dans $\mathbb{R}^d$, $x \mapsto x^\alpha$ sont des produits tensoriels. En effet par définition,*

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes x_d^{\alpha_d}.$$

Exemple 9.2.7. *Soit H la distribution de Heaviside sur $\mathbb{R}$. Soit $(x_1, \ldots, x_d) \in R^d$. Alors,*

$$\partial_{x_1} \cdots \partial_{x_d} (H(x_1) \otimes \cdots \otimes H(x_d)) = \delta_{x_1=0} \otimes \cdots \otimes \delta_{x_d=0} = \delta_{(0,\ldots,0)}.$$

9.3 Transformée de Fourier des distributions à support compact

Bien entendu, nous avons toujours $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Nous pouvons donc voir ce que l'on obtient lorsque l'on applique la transformée de Fourier à une distribution à support compact. La décroissance à l'infini étant maximale pour une telle distribution, on s'attend à obtenir une régularité maximale.

Théorème 9.3.1. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Soit $e_\xi : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi \cdot x}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. La distribution tempérée $\mathcal{F}T$ est la distribution associée à la fonction $\xi \mapsto \langle T, e_{-\xi} \rangle$. Cette fonction, notée $\xi \mapsto \mathcal{F}T(\xi)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et est à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées.*

Remarque 9.3.2. *Cela justife le fait que l'on ait pu considérer, au chapitre* **??** *des valeurs ponctuelles pour les transformées de Fourier du Dirac et de ses dérivées qui sont des distributions à support compact.*

Démonstration : Nous allons utiliser les résultats de dérivation et d'intégration sous le crochet. Par intégration sous le crochet, on a, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \langle T, e_{-\xi} \rangle, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T, e_{-\xi} \rangle \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi = \left\langle T, \int_{\mathbb{R}^d} e_{-\xi} \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi \right\rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle.$$

Puis, comme la fonction $(x, \xi) \mapsto e_{-\xi}(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, par théorème de dérivation sous le crochet, $\xi \mapsto \langle T, e_{-\xi} \rangle$ est de classe C^∞ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,

$$\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}T(\xi) = \partial_\xi^\alpha \langle T, e_{-\xi} \rangle = \langle T, \partial_\xi^\alpha e_{-\xi} \rangle.$$

Enfin, par définition d'une distribution et comme T est à support compact, si p est l'ordre de T et $R > 0$ est tel que supp $T \subset B(0, R)$,

$$\begin{aligned}|\langle T, e_{-\xi}\rangle| &\leq C \max_{|\alpha|\leq p} \sup_{|x|\leq R} |\partial_x^\alpha e_{-\xi}(x)| \\ &= C \max_{|\alpha|\leq p} \sup_{|x|\leq R} |(i\xi)^\alpha e_{-\xi}(x)| \\ &= C \max_{|\alpha|\leq p} |\xi^\alpha| \leq C \left(\frac{1+|\xi|}{2}\right)^p.\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}T$ est à croissance polynômiale. Il en est de même de toutes ses dérivées puisque $\partial_\xi^\alpha \mathcal{F}T = \mathcal{F}((-\mathrm{i}x)^\alpha T)$ et que la distribution $(-\mathrm{i}x)^\alpha T$ est aussi à support compact.

□

9.4 Produit de convolution de deux distributions

Nous avons déjà défini le produit de convolution de deux fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Soient u et v deux fonctions dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et calculons $T_{u\star v}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors la fonction $(x, y) \mapsto u(y)v(x-y)\varphi(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^{2d})$ et on a

$$< u \star v, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} u(y)v(x-y)\varphi(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} u(y)v(z)\varphi(y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

d'où,

$$< u \star v, \varphi >=< u_y \otimes v_z, \varphi(y+z) >,$$

le crochet de droite étant pris dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Nous allons donc poser comme définition de la convolution cette "formule" pour toutes les distributions. La principale difficulté provient ici du fait que même lorsque φ est à support compact, en général, $(y, z) \mapsto \varphi(y+z)$ ne l'est pas. Pour éviter ce problème, dans un premier temps nous allons supposer que l'une des deux distributions à convoler est elle à support compact.

9.4.1 Définition et propriétés de base

Définition 9.4.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ (ou l'inverse). La forme linéaire notée $T \star S$ définie sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ par*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), < T \star S >=< T \otimes S, \varphi^\Delta >$$

où $\varphi^\Delta : (y, z) \mapsto \varphi(y+z)$, est une distribution appelée convolution des distributions T et S.

Démonstration : Le fait que le membre de droite ait un sens résulte du fait que S est supposée à support compact. On peut donc multiplier φ^Δ par une fonction plateau valant 1 sur le support de S sans changer la valeur du membre de gauche et ainsi se ramener à une fonction à support compact.

Posons $A =< T \otimes S, \varphi^\Delta >$. Comme S appartient à $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, il existe $C_0 > 0$, $m \in \mathbb{N}$ et $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact tels que, pour toute $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$| < S, \psi(y + \cdot) > | \leq C_0 \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \psi(y+z)|.$$

D'autre part, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et la fonction $y \mapsto < S, \varphi(y+\cdot) >$ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ lorsque $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Il existe donc $C_1 > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$|A| \leq C_1 \sum_{|\beta|\leq k} \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |\partial_y^\beta < S, \varphi(y+\cdot) > | \leq C_1 \sum_{|\beta|\leq k} \sup_{y\in\mathbb{R}^d} | < S, \partial_y^\beta \varphi(y+\cdot) > |.$$

par dérivation sous le crochet. De là, en utilisant la première estimation avec $\psi = \partial^\beta \varphi$, on trouve

$$|A| \leq C_1 C_0 \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{|\beta|\leq k} \sup_{x\in K, y\in\mathbb{R}^d} |\partial^{\alpha+\beta}\varphi(y+z)| \leq C_1 C_0 \sum_{|\gamma|\leq m+k} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial^\gamma \varphi(x)|.$$

Cette dernière inégalité montre bien que $T \star S$ est une distribution sur $\mathbb{R}^d$.

□

Commençons par donner les propriétés algébriques de base du produit de convolution.

Proposition 9.4.2. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S, U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On a*

1. *Associativité : $T \star (S \star U) = (T \star S) \star U$.*
2. *Commutativité : $T \star S = S \star T$.*
3. *Élément neutre : $T \star \delta_0 = \delta_0 \star T = T$.*

Démonstration : La commutativité provient de l'égalité montrée dans la définition du produit tensoriel. Le fait que δ_0 est élément neutre pour la convolution est un calcul direct. L'associativité se voit immédiatement en écrivant la formule du produit tensoriel.

□

La dérivation se comporte très bien par rapport au produit de convolution.

Proposition 9.4.3. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors*

$$\partial^\alpha (T \star S) = (\partial^\alpha T) \star S = T \star (\partial^\alpha S).$$

En particulier, $(\partial^\alpha \delta_0) \star T = \partial^\alpha T$.
Plus généralement, pour toute décomposition du multi-indice $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, on a

$$\partial^\alpha (T \star \varphi) = (\partial^{\alpha_1} T) \star (\partial^{\alpha_2} \varphi).$$

Démonstration : On ne démontre que le premier point, les deux autres en découlent. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a

$$< \partial^\alpha (T \star S), \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T \star S, \partial^\alpha \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T_y < S_z, (\partial^\alpha \varphi)(y+z) >> .$$

Or, $(\partial^\alpha \varphi)(y+z) = \partial_z^\alpha (\varphi(y+z))$ et $< S_z, \partial_z^\alpha (\varphi(y+z)) >= (-1)^{|\alpha|} < \partial^\alpha S, \varphi(y+\cdot) >$. D'où,

$$< \partial^\alpha (T \star S), \varphi >=< T_y, < (\partial^\alpha S)_z, \varphi(y+z) >>=< T \star (\partial^\alpha S), \varphi > .$$

L'autre égalité se démontre de même en utilisant le fait que l'on a aussi $(\partial^\alpha \varphi)(y+z) = \partial_y^\alpha (\varphi(y+z))$.

□

Remarque. L'associativité s'étend de manière naturelle au cas du produit de convolution de k distributions qui est donc définit dès lors qu'au plus une n'est pas à support compact. Cette hypothèse est importante comme le montre l'exemple suivant. Prenons $T = 1$, $S = \delta_0'$ et $U = H$ la distribtion de Heaviside. Alors seule S est à support compact, T et U ne le sont pas et on a $(1 \star \delta_0') \star H = 0$ car $1 \star \delta_0' = (1)' \star \delta_0 = 0 \star \delta_0 = 0$ alors que $1 \star (\delta_0' \star H) = 1$ car $\delta_0' \star H = \delta_0 \star H' = \delta_0 \star \delta_0 = \delta_0$ et $1 \star \delta_0 = 1$.

Le produit de convolution est continu.

Proposition 9.4.4. *1. Supposons que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers S dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $(T \star S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T \star S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

2. Supposons que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $(T_n \star S)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T \star S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a $< T \star S_n, \varphi >=< S_n \star T, \varphi >=< S_n, < T, \varphi(y + \cdot) >>$. Comme la fonction $y \mapsto< T, \varphi(y + \cdot) >$ est C^∞ on peut passer à la limite dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ pour obtenir que $< T \star S_n, \varphi >$ tend vers $< S, < T, \varphi(y + \cdot) >>=< S \star T, \varphi >$. On procède de même pour le second point.

□

Nous avons un premier résultat sur le support du produit de convolution de deux distributions.

Proposition 9.4.5. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors* supp $(T \star S) \subset$ supp $T +$ supp S.

Démonstration : On introduit l'application

$$s : \begin{array}{ccc} \text{supp } T \times \text{supp } S & \to & \mathbb{R}^d \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}.$$

Soit $x \notin \text{supp } T + \text{supp } S$. Puisque supp $T +$ supp S est un fermé, il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \cap (\text{supp } T + \text{supp } S) = \emptyset$. Alors, pour $\varphi \in C_0^\infty(B(x, \delta))$, on a

$$\text{supp } \varphi^\Delta \cap (\text{supp } T \times \text{supp } S) = s^{-1}(\text{supp } \varphi) \subset s^{-1}(B(x, \delta)) = \emptyset.$$

Ainsi, $< T \star S, \varphi >=< T \otimes S, \varphi^\Delta >= 0$ et $x \notin \text{supp } (T \star S)$.

□

L'inclusion réciproque n'est pas vraie en général. Il suffit de prendre deux fonctions localement intégrables u et v avec $u = 1$ et $\int_{\mathbb{R}^d} v(x)\mathrm{d}x = 0$. On a alors $u \star v = 0$ d'où supp $T_u \star T_v = \emptyset$ tandis que supp $T_u +$ supp $T_v = \mathbb{R}^d$ puisque supp $T_u = \mathbb{R}^d$.
On peut toutefois esquisser une forme d'inclusion réciproque en se restreignant aux distributions à support compact et on considérant des enveloppes convexes. Si $A \subset \mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{C}(A)$ son enveloppe convexe, c'est à dire le plus petit ensemble convexe de $\mathbb{R}^d$ qui contient A. On a alors le résultat suivant.

Proposition 9.4.6. *Soient $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors,*

$$\mathcal{C}(\text{supp } (T \star S)) = \mathcal{C}(\text{supp } T) + \mathcal{C}(\text{supp } S).$$

Pour la démonstration de ce résultat, on renvoie à [5, Theorem 4.3.3, p107].

9.4.2 Convolution et transformée de Fourier

Nous allons voir que la transformée de Fourier permet de transformer le produit de convolution en produit ponctuel. Nous l'avons déjà vu dans le cas des fonctions de la classe de Schwartz, nous allons à présent étendre cette propriété au cas des distributions tempérées.

Théorème 9.4.7. *Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $T \star S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}(T \star S) = \mathcal{F}T\mathcal{F}S$.*

Démonstration : Remarquons tout d'abord que l'expression $\mathcal{F}T\mathcal{F}S$ a bien un sens puisque d'après le théorème 9.3.1, $\mathcal{F}S$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées et que $\mathcal{F}T$ est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
Supposons tout d'abord le cas plus simple où $T, S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $T \star S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{F}T$ et $\mathcal{F}S$ sont de classe C^∞. D'autre part, si $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}
\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \mathcal{F}(T \star S)(\xi) &= \langle T \star S, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\cdot,\xi)} \rangle \\
&= \langle T_y \otimes S_z, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y+z,\xi)} \rangle \\
&= \langle T_y, \langle S_z, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z,\xi)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y,\xi)} \rangle \rangle \\
&= \langle T_y, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y,\xi)} \rangle \langle S_z, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z,\xi)} \rangle \\
&= \mathcal{F}T(\xi)\mathcal{F}S(\xi).
\end{aligned}$$

Pour passer au cas où $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on utilise le résultat suivant : il existe une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. En effet, si $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est une fonction plateau valant 1 pour $|x| \leq 1$ et 0 pour $|x| \geq 2$, on pose pour tout $n \geq 1$, $T_n = \theta\left(\frac{\cdot}{n}\right) T$. Alors, pour $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
|\langle T_n - T, \varphi \rangle| &= \left| \langle T, \left(\theta\left(\frac{\cdot}{n}\right) - 1\right) \varphi \rangle \right| \\
&\leq C \sum_{|\alpha|\leq k, |\beta| \leq l} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \partial^\beta \left(\left(\theta\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right) \varphi(x) \right) \right| \\
&\leq \frac{C'}{n} p_{k',l'}(\varphi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{F}T_n$ tend vers $\mathcal{F}T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par continuité de la transformée de Fourier.

Or, pour tout $n \geq 1$, d'après le premier cas traité, $\mathcal{F}(T_n \star S) = \mathcal{F}T_n\mathcal{F}S$ et comme $\mathcal{S}$ est à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, on a que $\mathcal{F}T_n\mathcal{F}S$ tend vers $\mathcal{F}T\mathcal{F}S$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
Posons $U = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T\mathcal{F}S) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors,

$$T_n \star S = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T_n\mathcal{F}S) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}T\mathcal{F}S) = U \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),$$

donc dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. D'autre part, par continuité du produit de convolution, $T_n \star S \to T \star S$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. On en déduit par unicité de la limite que $T \star S = U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et que $\mathcal{F}(T \star S) = \mathcal{F}U = \mathcal{F}T\mathcal{F}S$, ce qui prouve le résultat voulu.

□

Nous pouvons énoncer un autre cas qui n'est pas couvert par le théorème précédent. Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On peut poser :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (T \star \varphi)(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle.$$

En effet, $T \star \varphi$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et par dérivation sous le crochet elle vérifie, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\partial_x^\alpha (T \star \varphi)(x) = \langle T, \partial^\alpha \varphi(x - \cdot) \rangle$. On a alors

Proposition 9.4.8. *Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Alors $T \star \varphi \in C^\infty \cap \mathcal{S}'$ et*

$$\mathcal{F}(T \star \varphi) = \hat{\varphi} \mathcal{F} T.$$

9.4.3 Interprétation physique de la convolution : convolution et translations

Considérons un système physique, que nous nous représenterons comme une "boîte noire", qui, lorsqu'on l'excite avec un signal $s(t)$ produit une réponse $r(t)$. On fait les hypothèses physiques suivantes :

- Le principe de superposition : si r_1 et r_2 sont les réponses aux signaux s_1 et s_2, alors la réponse au signal $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$ est $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$ pour tous réels λ_1 et λ_2.
- L'homogénéité dans le temps : la réponse au signal s décalé de T secondes est la réponse r décalée de T secondes.
- Une certaine stabilité : des signaux très voisins ne produisent pas des réponses très différentes.

Alors, si on considère l'application de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ qui à s associe r, nos hypothèses physiques s'interprètent comme le fait que cette application est linéaire, qu'elle commute avec les translations et qu'elle est continue en un certain sens. Sous ces hypothèses, on peut montrer qu'il existe une distribution T sur $\mathbb{R}$ telle que $r = T \star s$. Ce résultat étant très général, il explique en partie le fait que la convolution intervienne très souvent en physique.

Nous allons maintenant montrer que la convolution commute avec les translations, ce qui est une propriété caractéristique de la convolution. Rappelons que pour $a \in \mathbb{R}^d$, on définit la translation par a par :

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto & f(\cdot - a) \end{array} .$$

Alors, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on pose :

$$< \tau_a T, \varphi > = < T, \tau_a \varphi > .$$

On a alors la propriété simple suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \ \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \ \delta_a \star T = \tau_a T.$$

Proposition 9.4.9. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Alors,*

$$\tau_a(T \star S) = (\tau_a T) \star S = T \star (\tau_a S).$$

Démonstration : Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a

$$\begin{aligned} < \tau_a(T \star S), \varphi > &= < T \star S, \tau_a \varphi > \\ &= < T \otimes S, (\tau_a \varphi)^\Delta > \\ &= < T_y \otimes S_z, \varphi(y + z - a) > \\ &= < T_y \otimes S_z, \varphi(y + (z - a)) > \\ &= < T_y \otimes (\tau_a S_z), \varphi(y + z) > \\ &= < T \star (\tau_a S), \varphi > . \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} < T_y \otimes S_z, \varphi(y+z-a) > &= < T_y \otimes S_z, \varphi((y-a)+z) > \\ &= < (\tau_a T_y) \otimes S_z, \varphi(y+z) > \\ &= < (\tau_a T) \star S, \varphi > . \end{aligned} \tag{9.1}$$

D'où la double égalité voulue.

□

Comme dit plus haut, la convolution est caractérisée par cette propriété de commutation. Plus précisément, on peut énoncer le résultat démontré dans [1, Théorème 7.3.2, p139].

Théorème 9.4.10. *Soit U une application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même qui commute avec les translations,* i.e.,

$$\forall a \in \mathbb{R}^d,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ (U \circ \tau_a)(\varphi) = (\tau_a \circ U)(\varphi),$$

et qui vérifie la propriété de continuité suivante : pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un compact $L \subset \mathbb{R}^d$, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \sup_{x\in K, |\alpha|\le p} |\partial^\alpha (U\varphi)(x)| \le C \cdot \sup_{x \in L, |\beta| \le q} |\partial^\beta \varphi(x)|.$$

Alors, il existe une unique distribution $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ U\varphi = T \star \varphi.$$

9.4.4 Comment calculer un produit de convolution

Nous avons vu la définition d'un produit de convolution et les différentes propriétés de ce produit de convolution. Nous allons maintenant voir comment en pratique on peut calculer le produit de convolution de deux distributions suivant les situations.

Convolution de deux fonctions dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$

Si f et g sont deux fonctions dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, alors on a $T_f \star T_g = T_{f\star g}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

Il s'agit là tout simplement du calcul fait en introduction de cette section.

Convolution d'une distribution et d'une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors en notant aussi (abusivement) φ la distribution à support compact associée à φ, la distribution $T \star \varphi$ est donnée par la fonction de classe C^∞, $x \mapsto < T, \varphi(x - \cdot) >$.
En effet, soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a alors par définition du produit de convolution,

$$< T \star \varphi, \psi > = < T_y, < \varphi_z, \psi(y+z) > > = \left\langle T_y, \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-y)\psi(x)\mathrm{d}x \right\rangle .$$

Comme la fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x-y)\psi(x)$ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, on peut appliquer le théorème d'intégration sous le crochet pour obtenir

$$< T \star \varphi, \psi > = \int_{\mathbb{R}^d} < T, \varphi(x - \cdot) > \psi(x)\mathrm{d}x = << T, \varphi(x-\cdot) >, \psi > .$$

On précise que la fonction $x \mapsto < T, \varphi(x - \cdot) >$ est de classe C^∞ par le théorème de dérivation sous le crochet.
Remarque. Cette formule s'applique aussi si φ est seulement de classe C^∞ en supposant alors que $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

Utilisation des propriétés de la convolution

On peut par exemple utiliser l'approximation d'une des deux distributions par des fonctions de classe C^∞ ou C_0^∞ (comme on va le voir plus bas) et se ramener pour chaque terme de la suite au cas précédent. Parfois la suite approchante est suffisamment explicite pour permettre cette approche. On passe ensuite à la limite pour trouver la convolution des deux distributions.
On peut aussi utiliser les propriétés de dérivation de la convolution. Par exemple en dimension $d = 1$, si T est la dérivée de $\tilde{T}$, il peut être plus simple de calculer d'abord $\tilde{T} \star S$ et d'utiliser ensuite le fait que $T \star S = (\tilde{T} \star S)'$. Si au contraire il est plus simple de calculer $T' \star S$, on commence par faire ce calcul et alors on peut retrouver $T \star S$ à une constante près (par primitivation), constante que l'on pourra souvent déterminer à l'aide de la relation supp $(T \star S) \subset$ supp $(T) \star$ supp (S).

Exemple 9.4.11. *On veut calculer $\delta_0' \star \delta_0'$. On part de $\delta_0 \star \delta_0 = \delta_0$ et on dérive deux fois en faisant porter la dérivation une fois sur chaque terme pour obtenir que $\delta_0' \star \delta_0' = \delta_0''$.*

En désespoir de cause...

Si on est dans aucun des cas précédents, il s'agit alors d'appliquer directement la définition et de calculer un produit tensoriel.

Exemple 9.4.12. *On veut calculer $\delta_0' \star \delta_0'$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors*

$$< \delta_0' \star \delta_0', \varphi >=< \delta_0' \otimes \delta_0', \varphi(y+z) >=< \delta_0', -\varphi'(y) >= \varphi''(0) =< \delta_0'', \varphi > .$$

9.4.5 Généralisation aux paires convolutives

Il n'est pas indispensable qu'une des deux distributions soit à support compact. En fait, tous les résultats énoncés sont encore vrais, quitte à en adapter les démonstrations, au cas où les supports de T et de S forment une paire convolutive de fermés au sens suivant.
On dit que deux fermés F et G de $\mathbb{R}^d$ sont convolutifs si, pour tout $R > 0$, il existe $\rho(R) > 0$ tel que

$$\forall x \in F, \forall y \in G, \ |x+y| \leq R \Rightarrow \max(|x|, |y|) \leq \rho(R).$$

Cela revient au fait que l'image réciproque de tout compact par l'application continue

$$s : \begin{array}{ccc} F \times G & \to & \mathbb{R}^d \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

est un compact. On dit que l'application s est "propre".
Par exemple, le couple de fermés $([0, +\infty[, [0, +\infty[)$ est une paire convolutive (faire un dessin). Par contre, $(]-\infty, 0], [0, +\infty[)$ n'est pas convolutive.

9.5 Applications du produit tensoriel et de la convolution

9.5.1 Théorème de densité

Le résultat suivant est un résultat important de la théorie des distributions qui nous dit que finalement, même si on peut définir bien plus de distributions que de fonctions classiques, on peut tout de même approcher toute distribution par des fonctions test.

Théorème 9.5.1. *L'espace $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et dans $\mathcal{E}'(\Omega)$.*

Démonstration : On raisonne par troncature et régularisation. On commence par se donner une exhaustion de Ω par des compacts $(K_i)_{i\geq 1}$, puis des fonctions plateau $(\chi_i)_{i\geq 1}$ nulles hors de l'intérieur de K_{i+1} et valant 1 sur K_i. Soit ensuite $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que supp $\theta \subset B(0,1)$ et $\int \theta = 1$. On pose alors, pour tout $i \geq 1$, $\theta_i = i^n\theta(i\cdot)$. Pour i assez grand, supp $(\chi_i) +$ supp $\theta_i \subset \Omega$. D'autre part, $\chi_i T \in \mathcal{E}'(\Omega) \subset \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Posons

$$\forall i \geq 1,\ T_i = (\chi_i T) \star \theta_i.$$

Le terme $\chi_i T$ est dit de troncature et $\star\theta_i$ est le terme de régularisation. Alors $T_i \in C_0^\infty(\Omega)$ pour i assez grand car supp $T_i \subset$ supp $\chi_i +$ supp $\theta_i \subset \Omega$.

Il nous reste à montrer que $(T_i)_{i\geq 1}$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Alors,

$$\forall i \geq 1,\ < T_i, \varphi >=< \chi_i T, < \theta_i, \varphi(y+z) >> .$$

Or, $< \theta_i, \varphi(y+z) >= \int \theta_i(z)\varphi(y+z)\mathrm{d}z = (\check{\theta}_i \star \varphi)(y)$ où $\check{\theta}_i(y) = \theta_i(-y)$. De là, $< T_i, \varphi >=< T, \chi_i(\check{\theta}_i \star \varphi) >$. Pour terminer de démontrer le théorème, il suffit donc de montrer que la suite $(\chi_i(\check{\theta}_i \star \varphi))_{i\geq 1}$ converge vers φ dans $C_0^\infty(\Omega)$.

Pour i_0 assez grand, on a, pour tout $i \geq i_0$,

$$\text{supp } (\check{\theta}_i \star \varphi) \subset \text{supp } \varphi + B(0,1/i) \subset \text{supp } \varphi + \overline{B(0,1/i_0)} := K.$$

Alors $K \subset \Omega$ est un compact indépendant de i. Si i est assez grand, l'un des K_i (et donc les suivants aussi) contient K. D'où, pour i assez grand, $\chi_i = 1$ sur K. Ainsi on a

$$\text{supp } (\chi_i(\check{\theta}_i \star \varphi)) \subset \text{supp } (\check{\theta}_i \star \varphi) \subset K.$$

Il nous reste à montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $(\partial^\alpha(\check{\theta}_i \star \varphi))_{i\geq 1}$ converge uniformément vers $\partial^\alpha\varphi$ sur K. Soit $i \geq i_0$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (\check{\theta}_i \star (\partial^\alpha\varphi))(x) - \partial^\alpha\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \theta_i(-z)\partial^\alpha\varphi(x-z)\mathrm{d}z - \left(\int_{\mathbb{R}^d} \theta_i(-z)\mathrm{d}z\right)\partial^\alpha\varphi(x).$$

On pose $y = -iz$ dans les intégrales pour obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ (\check{\theta}_i \star (\partial^\alpha\varphi))(x) - \partial^\alpha\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \theta(y)\left(\partial^\alpha\varphi\left(x + \frac{1}{i}y\right) - \partial^\alpha\varphi(x)\right)\mathrm{d}y.$$

D'où, par les accroissements finis,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \left|(\check{\theta}_i \star (\partial^\alpha\varphi))(x) - \partial^\alpha\varphi(x)\right| \leq \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{d} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_{x_k}\partial^\alpha\varphi(x)| \int_{\mathbb{R}^d} |y_k| \cdot |\theta(y)|\mathrm{d}y \leq \frac{C}{i}.$$

Donc,

$$\sup_{x\in K}\left|(\check{\theta}_i \star (\partial^\alpha\varphi))(x) - \partial^\alpha\varphi(x)\right| \leq \frac{C}{i} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

La preuve dans le cas où $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ est en tout point analogue.

□

9.5.2 Structure locale des distributions

Théorème 9.5.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors T est une somme localement finie de dérivées de fonctions continues,* i.e., *pour tout compact $K \subset \Omega$,*

$$\exists k \in \mathbb{N},\ \forall |\alpha| \leq k,\ \exists f_\alpha \in C^0(\Omega),\ \forall \varphi \in C_0^\infty(K),\ < T, \varphi >= \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{R}^d} f_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x) \mathrm{d}x.$$

Lorsque T est d'ordre fini, l'entier k ne dépend pas du choix du compact K. Enfin, si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, alors T est une somme finie de dérivées de fonctions continues à support compact dans Ω.

Démonstration : On commence par écrire $T = \sum_{j \in J} \chi_j T$ avec J fini et $(\chi_j)_{j \in J}$ une partition de l'unité associé à K. Comme, pour tout $j \in J$, $\chi_j T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, elle est d'ordre fini k_j. Soit alors

$$P_j = \partial_{x_1}^{k_j+2} \cdots \partial_{x_d}^{k_j+2} \quad \text{et} \quad E_j = \left(\frac{x_1^{k_j+1} H(x_1)}{(k_j+1)!} \right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{x_d^{k_j+1} H(x_d)}{(k_j+1)!} \right).$$

Alors, $E_j \in C^{k_j}(\Omega)$ et $P_j E_j = \delta_0$. D'où, en posant $f_j = E_j \star (\chi_j T)$,

$$P_j f_j = (P_j E_j) \star (\chi_j T) = \chi_j T.$$

Soit encore $\partial^{\alpha_j} f_j = \chi_j T$ où $\alpha_j = (k_j + 2, \ldots, k_j + 2)$. Comme $\chi_j T$ est compacte d'ordre k_j et que $E_j \in C^{k_j}(\Omega)$, on a $f_j \in C^0(\Omega)$. De plus,

$$< T, \varphi >= \sum_{j \in J} (-1)^{|\alpha_j|} < f_j, \partial^{\alpha_j} \varphi >,$$

ce qui démontre le résultat voulu.

$\square$

Exemple 9.5.3. *On a, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\delta_0 = (xH)''$. Soit alors $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 dans un voisinage de zéro. On a $\delta_0 = \chi \delta_0$. Alors, par la formule de Leibniz, pour tout $k \geq 0$ et toute $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a*

$$\chi \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} T = \sum_{l=0}^{k} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (\chi_l T),\ \textit{avec}\ \chi_l \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

D'où :

$$\delta_0 = \chi \delta_0 = \sum_{l=0}^{2} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (\chi_l x H).$$

9.5.3 Le théorème du noyau de Schwartz

Toute fonction $K \in C(\Omega_1 \times \Omega_2)$ définit un operateur intégral $\mathcal{K}$ de $C_0(\Omega_2)$ dans $C(\Omega_1)$ par la formule

$$\forall \varphi \in C_0(\Omega_2),\ \forall x \in \Omega_1,\ (\mathcal{K}\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y) \varphi(y) \mathrm{d}y.$$

Nous allons voir à présent comment étendre cette définition au cadre des distributions. Tout d'abord, on remarque que, lorsque $K \in C(\Omega_1 \times \Omega_2)$,

$$\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega_1),\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_2),\ < \mathcal{K}\varphi, \psi >= K(\psi \otimes \varphi). \tag{9.2}$$

Théorème 9.5.4. *Toute distribution $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ définit via (9.2) une application linéaire $\mathcal{K} : C_0^\infty(\Omega_2) \to \mathcal{D}'(\Omega_1)$ qui est continue dans le sens suivant : si $\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dans $C_0^\infty(\Omega_2)$, alors $\mathcal{K}\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1)$.*
Réciproquement, si $\mathcal{K} : C_0^\infty(\Omega_2) \to \mathcal{D}'(\Omega_1)$ est une application linéaire qui est continue au sens précédent, il existe une unique distribution $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$ telle que (9.2) soit satisfaite. Dans ce cas, on appelle K le noyau de l'application $\mathcal{K}$.

Pour la démonstration de ce théorème difficile, on renvoie à [5, Theorem 5.2.1, p128].

Exemple 9.5.5. *Le noyau de l'application identité $\mathcal{K} : C_0^\infty(\Omega) \to C_0^\infty(\Omega)$ pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ est la distribution K donnée par :*

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega), < K, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, x) \mathrm{d}x$$

dont le support est la diagonale, $\{(x, x) \in \Omega \times \Omega | \; x \in \Omega\}$.

Exemple 9.5.6. *Plus généralement, si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est une fonction continue, le noyau de l'application*

$$\mathcal{K} : \begin{array}{ccc} C_0^\infty(\Omega_2) & \to & C_0^\infty(\Omega_1) \\ \psi & \mapsto & \psi \circ f \end{array},$$

est la distribution K donnée par :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2), < K, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, f(x)) \mathrm{d}x$$

dont le support est le graphe de f.

Chapitre 10

Solutions élémentaires d'EDPs

10.1 Théorèmes d'existence

10.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 10.1.1. *Une équation de convolution est une équation de la forme $A \star T = F$ où A et F sont des distributions données et où T est une distribution inconnue.*

Citons plusieurs exemples de telles équations.

1. Les EDPs linéaires à coefficients constants :

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha T = F, \; a_\alpha \in \mathbb{C}.$$

   En effet il suffit de prendre $A = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$.
2. Des équations aux différences finies. Par exemple, en dimension 1, l'équation $u(x+h) - u(x) = f(x)$ se met sous la forme voulue avec $A = \delta_{-h} - \delta_0$ et $T = T_u$, $F = T_f$.
3. Des équations intégrales du type $\int k(x-y)u(y)\mathrm{d}y = f(x)$.
4. Des combinaisons linéaires des cas précédents : EDPs avec retard, équations intégro-différentielles...

Dans la suite nous allons nous restreindre essentiellement au cas où $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$.

Définition 10.1.2. *Soit $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On dit qu'une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est une solution élémentaire de A (ou encore une "fonction de Green") lorsque $A \star E = \delta_0$.*

Il n'existe pas toujours de solution élémentaire, par exemple si $A \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, A n'en possède jamais (pour des questions de régularité).

Si A possède une solution élémentaire, on obtient toutes les autres en ajoutant à E une solution quelconque S de l'équation homogène $A \star S = 0$.

10.1.2 Existence de solutions

Nous pouvons énoncer tout d'abord un théorème d'existence de solution pour des équations de convolution pour des distributions A possédant une solution élémentaire.

Proposition 10.1.3. *Soit $A \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ possédant une solution élémentaire E.*

1. *Pour toute $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, il existe au moins une solution de $A \star T = F$ appartenant à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $T = E \star F$ en est une.*

2. *Pour tout $F \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, il existe au plus une solution de $A \star T = F$ appartenant à $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et, s'il en existe une, c'est $E \star T$.*

Démonstration : En effet, les supports de A et de F étant compacts, on peut écrire :

$$A \star (E \star F) = (A \star E) \star F = \delta_0 \star F = F.$$

Cela démontre le premier point. Si on suppose ensuite que T est une solution à support compact, on peut utiliser l'associativité de la convolution pour avoir :

$$T = (A \star E) \star T = (E \star A) \star T = E \star (A \star T) = E \star F,$$

d'où la seconde assertion.

□

Pour appliquer le théorème précédent il nous faut savoir que A possède une solution élémentaire. Cela est toujours le cas pour les EDPs linéaires à coefficients constants. C'est le théorème de Malgrange-Ehrenpreis.

Théorème 10.1.4 (Malgrange-Ehrenpreis (1955))**.** *Tout opérateur aux dérivée partielles à coefficients constants non nul admet une solution élémentaire.*

Démonstration : Ce théorème difficile est admis. Pour une démonstration, on renvoie à [5, Theorem 7.3.10, p189] ou [7, Theorem IX.23, p48]. Dans les deux cas, les démonstrations reposent sur des propriétés de la tranformée de Fourier et sur les propriétés des fonctions holomorphes.

□

Remarque. On peut prouver que si le degré de l'EDP est au moins égal à 1, alors la solution élémentaire ne peut être à support compact.

10.2 Théorème de régularité

Nous allons maintenant démontrer le théorème de régularité des solutions d'une EDP à coefficients constants.

Théorème 10.2.1. *Soit $A = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \delta_0$ avec $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Si A possède une solution élémentaire E qui est dans $C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ alors, pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et pour toute $f \in C^\infty(\Omega)$, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une solution de $A \star T = T_f$, alors T est associée à une fonction dans $C^\infty(\Omega)$.*

Démonstration : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une solution de $A \star T = T_f$ et soit $x_0 \in \Omega$. On veut montrer que T est de classe C^∞ au voisinage de x_0. Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ une fonction plateau au voisinage de x_0. On a alors $\chi T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et on peut considérer χT comme un élément de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors, par associativité du produit de convolution, on a : $\chi T = E \star (A \star (\chi T))$. Comme χ vaut 1 au voisinage de x_0, par la formule de Leibniz, on a :

$$A \star (\chi T) = \chi(A \star T) + R = \chi T_f + R,$$

où $R \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est un reste tel que $x_0 \notin \operatorname{supp} R$. Le fait que R est à support compact provient de l'égalité $R = A \star (\chi T) - \chi(A \star T) = 0$, hors du support de χ.

On a alors,
$$\chi T = E \star (A \star (\chi T)) = E \star (\chi T_f) + E \star R.$$
Quitte à considérer par prolongement que $\chi f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a $E \star (\chi f) \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ par les propriétés de régularité de la convolution. Il nous reste à montrer que $E \star R$ est de classe C^∞ au voisinage de x_0. Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau au voisinage de 0. Comme $x_0 \notin \text{supp } R$, on peut choisir θ de sorte que $x_0 \notin \text{supp } \theta + \text{supp } R$. De plus,
$$E \star R = (\theta E) \star R + ((1-\theta)E) \star R$$
et $((1-\theta)E) \star R \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ puisque $(1-\theta)E \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ puisque par hyptohèse, $E \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Soit enfin $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont le support est dans un voisinage suffisamment proche de x_0. Alors,
$$\text{supp } \varphi \cap \text{supp } ((\theta E) \star R) \subset \text{supp } \varphi \cap (\text{supp } \theta + \text{supp } R) = \emptyset,$$
de telle sorte que $(\theta E) \star R = 0$ dans un voisinage suffisamment proche de x_0. Cela termine la preuve.

□

10.3 Exemples de solutions élémentaires

10.3.1 Problème du laplacien

Le laplacien sur $\mathbb{R}^d$, $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial^2_{x_i x_i}$ a pour solution élémentaire, $E = xH$ lorsque $d = 1$, $E = \frac{1}{2\pi} \ln(|x|)$ lorsque $d = 2$ et
$$E = -\frac{1}{(d-2)S_{d-1}} \cdot \frac{1}{|x|^{d-2}},$$
où S_{d-1} désigne l'aire de la sphère unité $\mathbb{S}^{d-1}$ de $\mathbb{R}^d$, lorsque $d \geq 3$. Ces trois fonctions sont C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ donc toute solution de $\Delta u = f$ avec $f \in C^\infty$ est de classe C^∞. Il en résulte par exemple que les distributions harmoniques (*i.e.* les $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telles que $\Delta T = 0$) sont des fonctions C^∞.

Soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction radiale. Il existe alors $f : \mathbb{R} + \ to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $F(x) = f(|x|)$. On remarque que le Laplacien en coordonnées sphériques pour une fonction radiale est égal à
$$\Delta F = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\frac{df}{dr}.$$
Ainsi, pour $d = 2$, on vérifie, que, hors de 0,
$$\frac{d \log r}{dr} = \frac{1}{r} \text{ et } \frac{d^2}{dr^2}(\log r) = -\frac{1}{r^2},$$
et, pour $d \geq 3$,
$$\frac{d}{dr}(\frac{1}{r^{d-2}}) = -\frac{d-2}{r^{d-1}} \text{ et } \frac{d^2}{dr^2}(\frac{1}{r^{d-2}}) = +\frac{(d-1)(d-2)}{r^d}.$$
Ainsi l'équation est vérifiée sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ pour $d \geq 2$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{|x|^{d-2}}$ est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, donc définit une distribution d'ordre 0.
On définit, pour $d \geq 3$, la fonction ρ_ε égale à $\frac{1}{\varepsilon^{d-2}}$ pour $0 \leq r \leq \varepsilon$, et égale à r^{-d+2} pour $r \geq \varepsilon$. Cette fonction est continue et $\frac{d\rho_\varepsilon}{dr} = -(d-2)r^{-d+1}$ pour $r > \varepsilon$ et est nulle pour $r < \varepsilon$. On

considère alors la fonction radiale $R_\varepsilon : x \mapsto \rho_\varepsilon(|x|)$. On applique la formule des sauts, pour obtenir (utilisant la nullité de $\Delta\frac{1}{r^{d-2}}$ pour $r \neq 0$ et la continuité de ρ_ε en ε)

$$\begin{aligned}
\Delta R_\varepsilon &= \frac{d^2\rho_\varepsilon}{dr^2} + \frac{d-1}{r}\frac{d\rho_\varepsilon}{dr} \\
&= \Delta\frac{1}{r^{d-2}} + (\rho_\varepsilon(\varepsilon^+) - \rho_\varepsilon(\varepsilon^-))\delta'_{r=\varepsilon} + \left(\frac{d\rho_\varepsilon}{dr}(\varepsilon^+) - \frac{d\rho_\varepsilon}{dr}(\varepsilon^-)\right)\delta_{r=\varepsilon} \\
&= -(d-2)\varepsilon^{-d+1}\delta_{r=\varepsilon}. \qquad (10.1)
\end{aligned}$$

Par passage en coordonnées sphériques, on trouve

$$\begin{aligned}
< \Delta R_\varepsilon, \varphi > &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\frac{d^2\rho_\varepsilon}{dr^2}(r) + \frac{d-1}{r}\frac{d\rho_\varepsilon}{dr}(r)\right)\varphi(r,\omega)r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\sigma \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{d^2\rho_\varepsilon}{dr^2}(r) + \frac{d-1}{r}\frac{d\rho_\varepsilon}{dr}(r)\right) r^{d-1}\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(r,\omega)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}r \\
&= < \Delta R_\varepsilon, r^{d-1}\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(r,\omega)\mathrm{d}\sigma\right) >
\end{aligned}$$

La relation (10.1) entraine que

$$\begin{aligned}
< \Delta R_\varepsilon, \varphi > &= < \Delta R_\varepsilon, r^{d-1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(r,\omega)\mathrm{d}\sigma > \\
&= < -(d-2)\varepsilon^{-d+1}\delta_{r=\varepsilon}, r^{d-1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(r,\omega)\mathrm{d}\sigma > \\
&= -(d-2)\varepsilon^{-d+1}\varepsilon^{d-1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\varphi(\varepsilon,\omega)\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

Par le TCD, on vérifie que la dernière intégrale tend vers $\varphi(0)\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\mathrm{d}\sigma = S_{d-1}\varphi(0)$.

Nous avons donc, au sens des distributions,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta R_\varepsilon = -(d-2)S_{d-1}\delta_0.$$

Ainsi

$$\Delta\left(-\frac{1}{(d-2)S_{d-1}|x|^{d-2}}\right) = \delta_0.$$

Le cas de $d = 2$ se traite en considérant, de même, la fonction $\tilde{\rho}_\varepsilon$ égale à $\log r$ pour $r \geq \varepsilon$ et à $\log\varepsilon$ pour $0 \leq r \leq \varepsilon$. Ainsi

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\tilde{\rho}_\varepsilon}{dr}\right) = (1-0)\delta_{r=\varepsilon},$$

ce qui permet d'écrire

$$\left\langle \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\tilde{\rho}_\varepsilon}{dr}\right), \varphi\right\rangle = \int_0^{2\pi}\varepsilon\times\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\varepsilon\theta)d\theta \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2\pi\varphi(0).$$

On a ainsi $\Delta(\frac{1}{2\pi}\log|x|) = \delta_0$.

Enfin, par la dérivation usuelle des distributions :

$$(xH)'' = (H + xH')' = (H + x\delta_0)' = H' = \delta_0.$$

10.3.2 L'équation des ondes en dimension 1

On considère l'opérateur des ondes en $1D$, $P(\partial) = \partial^2_{tt} - \partial^2_{xx}$, associé au polynôme $P = X_1^2 - X_2^2$.

Soit la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ donnée par la fonction intégrable :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t - |x| \leq 0 \end{cases} .$$

Alors, E est une solution élémentaire de l'opérateur des ondes.

En effet, soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et soit $A > 0$ tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-A, A]^2$. On a, en utilisant Fubini,

$$\begin{aligned}
< (\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx})E, \varphi > &= < E, (\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx})\varphi > \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^A \int_x^A \partial^2_{tt}\varphi(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{-A}^0 \int_{-x}^A \partial^2_{tt}\varphi(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int_0^A \int_{-t}^t \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_0^A -\partial_t\varphi(x,x)\mathrm{d}x + \int_{-A}^0 -\partial_t\varphi(x,-x)\mathrm{d}x - \int_0^A \partial_x\varphi(t,t) - \partial_x\varphi(-t,t)\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \partial_t\varphi(u,u)\mathrm{d}u - \int_0^A \partial_x\varphi(u,u)\mathrm{d}u - \int_0^A \partial_t\varphi(-u,u)\mathrm{d}u + \int_0^A \partial_x\varphi(-u,u)\mathrm{d}u\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \phi_1'(u)\mathrm{d}u - \int_0^A \phi_2'(u)\mathrm{d}u\right] \ \text{avec}\ \phi_1(u) = \varphi(u,u)\ \text{et}\ \phi_2(u) = \varphi(-u,u) \\
&= \frac{1}{2}[\phi_1(0) + \phi_2(0)] = \varphi(0,0) =< \delta_{(0,0)}, \varphi > .
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx})E = \delta_{(0,0)}.$$

De là, si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact, une solution de l'équation des ondes

$$\partial^2_{tt}u - \partial^2_{xx}u = f$$

est donnée par $u = E \star f$.

10.3.3 Équation de la chaleur et modèle de Black-Scholes-Merton

L'opérateur de la chaleur $P = \partial_t - \Delta_x$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ admet pour solution élémentaire

$$E = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Pour simplifier les notations, nous allons le montrer pour $d = 1$. Tout d'abord,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq E(x,t) \leq \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} \ \text{ et }\ t \mapsto \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2).$$

Donc $E \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ et E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$ d'ordre 0. Un calcul de dérivées partielles nous conduit ensuite à l'égalité

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_t E(x,t) = \partial^2_{xx}E(x,t).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Posons :

$$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} E(x,t)\partial_t\varphi(x,t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} E(x,t)\partial^2_{xx}\varphi(x,t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Alors, par IPP à la première ligne, en utilisant l'égalité sur les dérivées partielles précédente à la deuxième ligne et deux IPP et Fubini à la troisième ligne, on obtient

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &= -\int_{\mathbb{R}} -E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} \partial_t(E(x,t))\varphi(x,t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} \partial^2_{xx}(E(x,t))\varphi(x,t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} E(x,t)\partial^2_{xx}\varphi(x,t)\ \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\mathrm{d}x - J_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{10.2}$$

D'où :

$$I_\varepsilon + J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\mathrm{d}x.$$

En posant $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, on a $\mathrm{d}x = \sqrt{\varepsilon}\mathrm{d}y$ et

$$I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}} \varphi(\sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon)\mathrm{d}y.$$

Or, par convergence dominée, applicable puisque $\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}\varphi(0,0)$ lorsque ε tend vers 0 et

$$\left|\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)\right| \leq ||\varphi||_\infty \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}} \ \text{ avec } y \mapsto ||\varphi||_\infty \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}} \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$I_\varepsilon + J_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{\varphi(0,0)}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{4}}\mathrm{d}y = \varphi(0,0).$$

Par ailleurs, puisque

$$(x,t) \mapsto \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}\partial_t\varphi(x,t) \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$$

on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}\partial_t\varphi(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

De même,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}\partial^2_{xx}\varphi(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Le calcul suivant est à présent parfaitement justifié,

$$\begin{aligned}
< (\partial_t - \partial^2_{xx})E, \varphi > &= - < E, (\partial_t + \partial^2_{xx})\varphi > \\
&= -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}(\partial_t + \partial^2_{xx})\varphi(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\mathbb{R}\times]0,+\infty[} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}(\partial_t + \partial^2_{xx})\varphi(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon + J_\varepsilon = \varphi(0,0) =< \delta_{(0,0)}, \varphi > .
\end{aligned}$$

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $(\partial_t - \partial^2_{xx})E = \delta_{(0,0)}$.

Nous allons maintenant faire le lien entre cette solution élémentaire de la chaleur et le modèle de Black-Scholes-Merton utilisé en mathématiques financières.

On appelle produit dérivé un contrat financier dont la valeur est basée sur la valeur d'un produit sous-jacent (en général une action). Typiquement, un produit dérivé donne le droit (mais pas l'obligation) à son possesseur d'acheter (call) ou de vendre (put) un produit financier à une date fixée (date de maturité) à un prix pré-déterminé (le strike). Etant donné que l'option confère à son possédant un droit sans obligation, elle a une certaine valeur. On pose :

— S la valeur du produit sous-jacent au temps t,
— V la valeur du produit dérivé au temps t,
— r le taux d'intérêt à risque nul, qui est la compensation pour le risque systémique qui ne peut être éliminé en détenant un portefeuille diversifié,
— σ la volatilité du produit sous-jacent qui est une mesure de l'ampleur des variations du cours du produit sous-jacent.

Alors, l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton qui donne V est :

$$\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial^2_{SS} V + rS\partial_S V - rV = 0.$$

Supposons que le produit dérivé est une option "call" (on parle de "call européen" si le souscripteur peut exercer son droit uniquement à la date de maturité et de " call américain" s'il peut l'exercer à tout moment avant la date de maturité) - (ce type de produit s'applique à des sous-jacents dont on anticipe une hausse du prix comme par exemple du kérosène pour une compagnie aérienne...). La valeur du "call" est notée C, la date de maturité est notée T et le strike K. On considère les conditions aux bords pour un call européen :

$$C(S,T) = \max(0, S-K), \quad C(0,t) = 0, \quad C(S,t) \sim S \text{ pour } S \text{ grand.}$$

De même, pour une option de vente ou "put" on note P la valeur du put et on se donne, pour un put européen :

$$P(S,T) = \max(0, K-S), \quad P(0,t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad P(S,t) \to 0 \text{ pour } S \text{ grand.}$$

On effectue un premier changement de variables :

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad C = Kv(x,\tau).$$

Alors l'équation de Black-Scholes-Merton devient, avec $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$:

$$\partial_\tau v = \partial^2_{xx} v + (k-1)\partial_x v - kv.$$

Puis, en posant $v = e^{\alpha x + \beta\tau} u(x,\tau)$ on obtient, pour $\alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$ et $\beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2$,

$$\partial_\tau u = \partial^2_{xx} u,$$

avec comme conditions initiales $u(x,0) = u_0(x) = \max(0, e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x})$ et comme conditions aux bords : $u(x,\tau) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$. On s'est donc ramené à l'équation de la chaleur. Par ailleurs, on sait que l'on a, en résolvant l'équation de la chaleur,

$$u(x,\tau) = u_0(x) \star \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}.$$

En faisant les changements de variables dans le sens inverse pour revenir aux variables (S,t) on obtient

$$C(S,t) = S\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

où

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-t^2}\mathrm{d}t\right), \quad d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

10.3.4 Opérateur $\bar{\partial}$

L'opérateur $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)$ définit sur $\mathbb{R}^2$ admet pour solution élémentaire $z \mapsto \frac{1}{\pi z}$. En particulier, les distributions holomorphes (*i.e.* les $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telles que $\bar{\partial}T = 0$) sont les fonctions holomorphes usuelles.

On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \frac{1}{x+\mathrm{i}y}$. On commence par remarquer que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ car dans $\mathbb{R}^d$, $x \mapsto ||x||^{-\alpha}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < d$. Ainsi, on peut légitimement associer à f une distribution d'ordre 0.
Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On a

$$\begin{aligned}
< \bar{\partial} f, \varphi > &= \frac{1}{2} < \partial_x f, \varphi > + \frac{1}{2}\mathrm{i} < \partial_y f, \varphi > \\
&= -\frac{1}{2} < f, \partial_x \varphi > - \frac{1}{2}\mathrm{i} < f, \partial_y \varphi > \\
&= -\frac{1}{2} < f, \partial_x \varphi + \mathrm{i}\partial_y \varphi > \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+\mathrm{i}y} (\partial_x \varphi + \mathrm{i}\partial_y \varphi)(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x\partial_x \varphi + y\partial_y \varphi}{x^2+y^2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{i}}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x\partial_y \varphi - y\partial_x \varphi}{x^2+y^2}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

On pose alors $\tilde{\varphi}(r,\theta) = \varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. On a :

$$\partial_r \tilde{\varphi}(r,\theta) = \partial_r \varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \cos\theta \partial\varphi(x,y) + \sin\theta \partial_y \varphi(x,y) = \frac{1}{r} x\partial_x \varphi(x,y) + y\partial_y \varphi(x,y)$$

et

$$\partial_\theta \tilde{\varphi}(r,\theta) = \partial_\theta \varphi(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = -r\sin\theta \partial_x \varphi(x,y) + r\cos\theta \partial_y \varphi(x,y) = x\partial_y \varphi(x,y) - y\partial_x \varphi(x,y).$$

D'où, par changement de variables en polaires,

$$< \bar{\partial} f, \varphi >= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} r\partial_r \tilde{\varphi}(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta - \frac{\mathrm{i}}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} \partial_\theta \tilde{\varphi}(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r^2} r\partial_r \tilde{\varphi}(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(\varepsilon,\theta)\mathrm{d}\theta$$

et

$$-\frac{\mathrm{i}}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{r^2} r\partial_\theta \tilde{\varphi}(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = -\frac{\mathrm{i}}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r} (\tilde{\varphi}(r,2\pi) - \tilde{\varphi}(r,0))\mathrm{d}r = 0.$$

Or, comme f est intégrable au voisinage de $(0,0)$,

$$< \bar{\partial} f, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0} \; -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r^2} r\partial_r \tilde{\varphi}(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta - \frac{\mathrm{i}}{2} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^\infty \frac{1}{r^2} \partial_\theta \tilde{\varphi}(r,\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

et ainsi

$$< \bar{\partial} f, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}(\varepsilon,\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(0,0)\mathrm{d}\theta = \pi\varphi(0,0),$$

car on peut appliquer ici le TCD puisque $\theta \mapsto |\tilde{\varphi}(\varepsilon,\theta)|$ est bornée, donc intégrable sur $[0,2\pi]$, et $\tilde{\varphi}(\varepsilon,\theta) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varphi(0,0)$. Finalement,

$$< \bar{\partial} f, \varphi >= \pi\varphi(0,0) =< \pi\delta_0, \varphi >,$$

soit encore : $\bar{\partial} f = \pi\delta_0$.

10.4 Support singulier d'une distribution

Définition 10.4.1. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $x \in \Omega$ n'est pas dans le support singulier de T lorsqu'il existe un voisinage V de x tel que $T|_V$ soit la distribution associée à une fonction C^∞. On note le support singulier de T,* suppsing(T). *On a donc*

$$\mathrm{suppsing}(T) = \left(\left\{x \in \Omega,\ \exists V \in V(x_0),\ \exists f \in C^\infty(V),\ T|_V = T_f\right\}\right)^c.$$

Proposition 10.4.2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

1. *Le support singulier d'une distribution est un ensemble fermé.*
2. $\mathrm{suppsing}(T) = \emptyset \Leftrightarrow \exists f \in C^\infty(\Omega),\ T = T_f$.
3. $\mathrm{suppsing}(T) \subset \mathrm{supp}\ T$.
4. *Soit $f \in C^\infty(\Omega)$. Alors,* $\mathrm{suppsing}(fT) \subset \mathrm{suppsing}(T) \cap \mathrm{supp}\ f$ *et* $\mathrm{suppsing}(T + T_f) = \mathrm{suppsing}(T)$.
5. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$,* $\mathrm{suppsing}(\partial^\alpha T) \subset \mathrm{suppsing}(T)$.
6. *En particulier, pour tout $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$,* $\mathrm{suppsing}(P(\partial)T) \subset \mathrm{suppsing}(T)$.

Démonstration : Comme le fait d'être C^∞ au voisinage d'un point est une notion ouverte, le complémentaire de $\mathrm{suppsing}(T)$ est un ouvert, donc $\mathrm{suppsing}(T)$ est un fermé.

Le second point découle directement de la définition et du fait que le caractère C^∞ pour une fonction est une notion locale.

Si $x_0 \notin \mathrm{supp}\ T$, alors T est nulle au voisinage de x_0 donc est associée à la fonction nulle qui est C^∞ et $x_0 \notin \mathrm{suppsing}(T)$.

Comme $f \in C^\infty(\Omega)$, il est clair que $T + T_f$ est associée à une fonction C^∞ si et seulement si T l'est. D'où la seconde égalité du point 4. Pour la première inclusion, soit $x_0 \in \mathrm{suppsing}(T)^c \cup (\mathrm{supp}\ f)^c$. Si $x_0 \in \mathrm{suppsing}(T)^c$ alors T est associée à une fonction g de classe C^∞ au voisinage de x_0 et fT est alors associée à la fonction fg qui est de classe C^∞ au voisinage de x_0. Donc $x_0 \in \mathrm{suppsing}(fT)^c$. Si $x_0 \in (\mathrm{supp}\ f)^c$ alors f est nulle au voisinage de x_0, fT l'est aussi et on a encore $x_0 \in \mathrm{suppsing}(fT)^c$.

Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, si T est associée à une fonction g de classe C^∞ au voisinage de x_0, alors $\partial_{x_i} T$ est associée à $\partial_{x_i} g$ qui est encore de classe C^∞ au voisinage de x_0, donc en passant au complémentaire, $\mathrm{suppsing}(\partial_{x_i} T) \subset \mathrm{suppsing}(T)$. On en déduit le point 5 par récurrence et le point 6 par linéarité.

□

L'inclusion réciproque dans 6 est fausse en général comme le montre l'exemple suivant. Soit $\Omega = \mathbb{R}^2$ et soit $P = X_1$ auquel est associé $P(\partial) = \partial_{x_1}$. Soit $T = \mathbb{1}_{x_1} \otimes H$ où H est la distribution de Heaviside. Alors $T = 1$ pour $x_2 > 0$ et $T = 0$ pour $x_2 < 0$. Donc $\mathrm{suppsing}(T)$ est exactement l'axe des abscisses, mais

$$\partial_{x_1} T = (\partial_{x_1} \mathbb{1}_{x_1}) \otimes H = 0 \otimes H = 0$$

et $\mathrm{suppsing}(P(\partial)T) = \emptyset$. Donc $\mathrm{suppsing}(T) \not\subset \mathrm{suppsing}(P(\partial)T)$.

Cette remarque nous conduit à définir les opérateurs différentiels à coefficients constants pour lesquels l'inclusion inverse dans 6 est vraie.

Définition 10.4.3. *Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots X_d]$. On dit que $P(\partial)$ est hypoelliptique sur Ω lorsque*

$$\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \mathrm{suppsing}(T) = \mathrm{suppsing}(P(\partial)T).$$

On remarque que si $P(\partial)$ est hypoelliptique sur $\mathbb{R}^d$ et si $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est une solution élémentaire de $P(\partial)$, alors

$$\text{suppsing}(E) = \text{suppsing}(P(\partial)E) = \text{suppsing}(\delta_0) = \{0\}.$$

Ainsi, E est associée à une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Le théorème de régularité est essentiellement la réciproque de cette propriété et peut être écrit de la façon suivante.

Proposition 10.4.4. *Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$. Si P admet une solution élémentaire E associée à une fonction dans $C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, alors $P(\partial)$ est hypoelliptique sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et soit $x_0 \notin \text{suppsing}(P(\partial)T)$. Il existe un voisinage V de x_0 tel que la restriction de $P(\partial)T$ à V soit associée à une fonction C^∞. Alors, le Theorème 10.2.1 affirme que la restriction à V de T est associée à une fonction C^∞ et $x_0 \notin \text{suppsing}(T)$. D'où, $\text{suppsing}(T) \subset \text{suppsing}(P(\partial)T)$.

□

Le support singulier d'une convolution vérifie la même inclusion que pour le support.

Proposition 10.4.5. *Soient T_1 et T_2 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ dont les supports forment une paire convolutive. Alors,*

$$\text{suppsing}(T_1 \star T_2) \subset \text{suppsing}(T_1) + \text{suppsing}(T_2).$$

Démonstration : Pour simplifier, supposons que T_1 et T_2 sont dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors, comme fermés inclus dans les supports respectivement de T_1 et T_2 qui sont compacts, $\text{suppsing}(T_1)$ et $\text{suppsing}(T_2)$ sont des compacts. Il existe donc deux fonctions plateaux $\chi_{i,\varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui valent 1 sur $\text{suppsing}(T_i) + \overline{B}(0, \varepsilon/2)$ et supportées dans $\text{suppsing}(T_i) + B(0, \varepsilon)$. Alors,

$$T_1 \star T_2 = ((\chi_{1,\varepsilon} + 1 - \chi_{1,\varepsilon})T_1) \star ((\chi_{2,\varepsilon} + 1 - \chi_{2,\varepsilon})T_2) = (\chi_{1,\varepsilon}T_1) \star (\chi_{2,\varepsilon}T_2) + R$$

où R est associée à une fonction dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. De là,

$$\begin{aligned} \text{suppsing}(T_1 \star T_2) &\subset \text{suppsing}((\chi_{1,\varepsilon}T_1) \star (\chi_{2,\varepsilon}T_2)) \\ &\subset \text{supp}\ ((\chi_{1,\varepsilon}T_1) \star (\chi_{2,\varepsilon}T_2)) \\ &\subset \text{supp}\ (\chi_{1,\varepsilon}T_1) + \text{supp}\ (\chi_{2,\varepsilon}T_2) \\ &\subset \text{supp}\ (\chi_{1,\varepsilon}) + \text{supp}\ (\chi_{2,\varepsilon}) \\ &\subset \text{suppsing}(T_1) + B(0,\varepsilon) + \text{suppsing}(T_2) + B(0,\varepsilon) \\ &\subset \text{suppsing}(T_1) + \text{suppsing}(T_2) + B(0, 2\varepsilon). \end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu en faisant tendre ε vers 0 et en utilisant le fait que le support singulier est un fermé.

□

Exemple 10.4.6. *Nous reprenons les opérateurs différentiels à coefficients constants classiques de la physique et nous discutons de leur hypoellipticité.*

1. *Le Laplacien admet une solution élémentaire de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ donc est hypoelliptique.*
2. *L'opérateur de la chaleur l'est aussi pour la même raison.*
3. *L'opérateur $\bar{\partial}$ l'est aussi et en particulier, les distributions holomorphes* (i.e. *telles que $\bar{\partial}T = 0$*) *sont associées aux fonctions holomorphes usuelles.*
4. *L'opérateur ∂_{x_1} dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas hypoelliptique.*
5. *L'opérateur des ondes en 1D n'est pas non plus hypoelliptique. En effet, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 mais pas de classe C^∞, on a alors $P(\partial)(f(t \pm x)) = 0$ donc $(x,t) \mapsto f(t \pm x)$ est solution de l'équation des ondes sans être de classe C^∞. Pourtant le second membre étant la fonction nulle, il est bien de classe C^∞. On retrouve le fait que la solution élémentaire trouvée pour cette EDP n'était pas C^∞ au voisinage de tout point dans $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2,\ x = |t|\}$.*

Annexe A

Mesure et intégrale de Lebesgue

A.1 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Quelles sont les propriétés fondamentales que partagent la longueur d'une partie de $\mathbb{R}$, l'aire d'une partie de $\mathbb{R}^2$, le volume d'une partie de $\mathbb{R}^3$ et plus généralement le volume d'une partie de $\mathbb{R}^d$? Peut-on donner un sens au volume de toute partie de $\mathbb{R}^d$? On attend d'une notion de longueur, d'aire et de volume d'avoir en commun la positivité et la propriété d'additivité qui est que, si deux parties A et B de $\mathbb{R}^d$ sont disjointes, le volume de leur réunion est égal à la somme de leurs volumes : $\mathrm{vol}(A \cup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B)$ lorsque $A \cap B = \emptyset$. Une autre propriété attendue du volume est l'invariance par translation. Si $x \in \mathbb{R}^d$ et A est une partie de $\mathbb{R}^d$, $\mathrm{vol}(x + A) = \mathrm{vol}(A)$. Au début du XX^e siècle, Émile Borel introduit une idée clé, celle qu'une notion de volume doit vérifier une propriété plus forte, l'additivité dénombrable, pour pouvoir s'intégrer utilement dans les théories modernes d'analyse. Une « bonne » notion de volume devra donc vérifier que, pour toute famille dénombrable $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}^d$ deux à deux disjointes,

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{p\in\mathbb{N}} A_p\right) = \sum_{p\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(A_p).$$

Mais, une telle notion de volume qui associerait à *toute* partie de $\mathbb{R}^d$ un réel positif vérifiant l'additivité dénombrable et l'invariance par translation n'existe pas. C'est Henri Lebesgue qui en 1902 sera le premier à construire un exemple de *mesure* sur $\mathbb{R}$ qui soit dénombrablement additive et invariante par translation. Cette mesure correspond à la notion de volume recherchée. Pour cela, Lebesgue introduit la notion de mesure extérieure qui approche « par au-dessus » la mesure de toute partie de $\mathbb{R}$. Puis il définit les parties de $\mathbb{R}$ qui seront suffisament peu irrégulières pour que l'on puisse leur associer une mesure. Ce sont les parties Lebesgue-mesurables de $\mathbb{R}$.

A.1.1 Ensembles mesurables et mesure de Lebesgue

Nous commencons par définir les pavés de $\mathbb{R}^d$ et leur volume. Un pavé P dans $\mathbb{R}^d$ est un produit cartésien de d intervalles de $\mathbb{R}$ bornés (ouverts, fermés, semi-ouverts ou semi-fermés)

$$P = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d),$$

où $a_j \leq b_j$ sont des nombres réels, $j = 1, \ldots, d$. Pour un tel sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, la notion naturelle de volume associée est le produit des longueurs des côtés. On appelle *volume* d'un pavé P le réel positif noté $|P|$ défini par

$$|P| = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d).$$

Une union de pavés est dite *quasi disjointe* si les intérieurs des pavés de l'union sont disjoints. Enfin, un *cube* est un pavé pour lequel $b_1 - a_1 = \cdots = b_d - a_d$. L'intérêt de ces cubes et pavés provient du fait que leurs réunions approchent bien les ouverts de $\mathbb{R}^d$.

Proposition A.1.1. *Tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^d$ peut s'écrire comme union dénombrable de cubes quasi disjoints.*

Pour définir le volume d'une partie plus compliquée qu'un pavé, nous commençons par construire une fonction qui à toute partie de $\mathbb{R}^d$ associe un volume qui généralise le volume des pavés. L'idée est d'approcher « par au-dessus » tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ par des cubes. Soit E une partie de $\mathbb{R}^d$. On appelle mesure extérieure de E le réel positif défini par

$$\lambda_d^*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |C_j| \;\middle|\; \forall j \geq 1,\ C_j \text{ est un cube fermé et } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\}.$$

Pour les parties simples comme l'ensemble vide, un point ou un cube, la mesure extérieure correspond bien à notre idée intuitive de volume. La mesure extérieure de $\mathbb{R}^d$ est infinie.
Toutefois, la mesure extérieure ne vérifie pas l'additivité dénombrable voulue pour définir une bonne notion de volume. Nous avons seulement l'inégalité suivante : si $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, alors

$$\lambda_d^*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d^*(E_j).$$

On a tout de même que si $E = E_1 \cup E_2$ avec $d(E_1, E_2) > 0$, alors $\lambda_d^*(E) = \lambda_d^*(E_1) + \lambda_d^*(E_2)$.
Malgré ces deux propriétés, on ne peut pas conclure en général que, si $E_1 \cup E_2$ est une union disjointe de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$, $\lambda_d^*(E_1 \cup E_2) = \lambda_d^*(E_1) + \lambda_d^*(E_2)$. Cette égalité n'aura lieu que pour des ensembles qui ne sont pas trop pathologiques, les ensembles mesurables.

Définition A.1.2. *Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit Lebesgue-mesurable, ou plus simplement mesurable, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $\mathcal{O}$ contenant E tel que*

$$\lambda_d^*(\mathcal{O} \setminus E) \leq \varepsilon.$$

On a alors que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est mesurable, qu'une union dénombrable d'ensembles mesurables est mesurable et que le complémentaire d'un ensemble mesurable est mesurable.

Nous pouvons maintenant définir la notion de mesure pour un ensemble mesurable. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, on définit sa mesure de Lebesgue par $\lambda_d(E) = \lambda_d^*(E)$. Alors, la mesure de Lebesgue vérifie bien la propriété d'additivité dénombrable.
Soit $(E_j)_{j\geq 1}$ une famille dénombrable d'ensembles mesurables et disjoints dans $\mathbb{R}^d$. Alors leur réunion $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ est mesurable et

$$\lambda_d(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_d(E_j).$$

On a aussi l'invariance par translation : si E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, le translaté $x + E = \{x + y \mid y \in E\}$ est mesurable et $\lambda_d(x + E) = \lambda_d(E)$.

On note souvent aussi la mesure de Lebesgue par le symbole $\mathrm{d}x$ au lieu de λ_d.

A.1.2 Espaces mesurés et applications mesurables

On généralise la notion de mesure à un ensemble quelconque en demandant à ce que les principales propriétés de stabilité des ensembles mesurables et de la mesure de Lebesgue soient conservées.

Définition A.1.3. *Soit X un ensemble. Une tribu sur X est un sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}(X)$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *$X \in \mathcal{M}$;*
2. *si $A \in \mathcal{M}$, son complémentaire A^c est dans $\mathcal{M}$;*
3. *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.*

Les éléments de $\mathcal{M}$ sont appelés ensembles mesurables. Un espace mesurable est un couple $(X, \mathcal{M})$ où X est un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu sur X.

Exemple A.1.4. ***(Tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$).*** *L'ensemble des parties de $\mathbb{R}^d$ Lebesgue-mesurables forme une tribu sur $\mathbb{R}^d$ que nous noterons $\mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d)$.*

Exemple A.1.5. *On appelle tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire, la plus petite tribu de $\mathbb{R}^d$ contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$ (pour la topologie usuelle).*

Une mesure est une fonction définie sur une tribu, à valeurs positives, vérifiant une condition d'additivité dénombrable. Nous axiomatisons donc la propriété de σ-additivité obtenue pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Définition A.1.6. *Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Une mesure sur $(X, \mathcal{M})$ est une application de $\mathcal{M}$ dans $[0, +\infty]$, telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties mesurables deux à deux disjointes,*

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n), \ (\sigma\text{−additivité}).$$

Si μ est une mesure sur $(X, \mathcal{M})$, le triplet $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est appelé un espace mesuré.

Exemple A.1.7. *La mesure de Lebesgue est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}_L(\mathbb{R}^d))$.*

Exemple A.1.8. *Les mesures discrètes $\mathrm{d}\mu = \sum_{j\in J} \alpha_j \delta_{b_j}$, où J est un ensemble fini ou dénombrable, $b_j \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha_j > 0$ et par définition, pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}^d$, et tout $b \in \mathbb{R}^d$,*

$$\delta_b(A) = \begin{cases} 1 & si\ b \in A \\ 0 & si\ b \notin A. \end{cases}$$

Définition A.1.9. *On appelle mesure de Radon positive sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ une mesure positive μ sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\Omega)$ qui est finie sur les compacts :*

$$\forall K \subset \Omega \text{ compact}, \ \mu(K) < +\infty.$$

On appelle mesure de Radon tout combinaison linéaire $\mu_1 - \mu_2 + \mathrm{i}(\mu_3 - \mu_4)$ où les μ_j sont des mesures de Radon positives.

Les deux exemples précédents sont des mesures de Radon positives.

Concluons par un point de terminologie.

Définition A.1.10. *Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et soit P une propriété définie sur X. On dit que P est vraie μ-presque partout si elle est vraie hors d'un ensemble mesurable de mesure nulle. On écrit aussi P vraie μ-pp. On dit encore que P est vraie pour μ-presque tout x dans X.*

On termine par la notion de mesurabilité d'une application entre espaces mesurables qui est analogue à celle de la continuité d'une application entre espaces topologiques et utilise la notion d'image réciproque.

Définition A.1.11. *Soient $(X,\mathcal{M})$ et $(Y,\mathcal{N})$ deux espaces mesurables. Une application f de X dans Y est dite mesurable lorsque, pour tout ensemble mesurable $N \in \mathcal{N}$, son image réciproque $f^{-1}(N)$ est mesurable, c'est-à-dire que $f^{-1}(N) \in \mathcal{M}$.*

Exemple A.1.12. ***(Fonctions caractéristiques).*** *On considère un espace mesurable $(X,\mathcal{M})$ et on munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. Pour une partie A de X,* la fonction caractéristique $\mathbb{1}_A$ est mesurable si et seulement si A est mesurable.

Exemple A.1.13. *Soit h une fonction mesurable positive. On définit la mesure à poids, $\mathrm{d}\mu(x) = h(x)\mathrm{d}x$ avec $h > 0$ par :*

$$\forall A \subset \text{ mesurable, } \mu(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_A h(x)\mathrm{d}x.$$

A.2 Intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

On commence par définir l'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive. On appelle fonction étagée toute combinaison linéaire finie d'indicatrices d'ensembles mesurables :

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j},\ \alpha_j \in \mathbb{R},\ A_j \subset \mathbb{R}^d \text{ et mesurable.}$$

On appelle *intégrale de φ sur $\mathbb{R}^d$* la quantité, notée $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\lambda_d$, définie par

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\lambda_d = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda_d(A_j) \in [0,+\infty].$$

Pour définir l'intégrale d'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$, on utilise un procédé d'approximation : on cherche à écrire f sous la forme $f = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n$ avec $\varphi_n : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty[$ étagée et mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on pose ensuite $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n$.

Proposition A.2.1. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ une fonction mesurable. Alors il existe une suite $(\varphi_n : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty])_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées mesurables telles que*

1. *$0 \le \varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*
2. *la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.*

De plus, si f est bornée sur $A \subset X$, la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A.

On peut alors définir l'intégrale d'une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ de la façon suivante. Soit $f : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ une fonction mesurable. On appelle *intégrale* de f la quantité, notée $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d$, définie par

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\lambda_d \ : \ \varphi : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty[\text{ mesurable étagée et telle que } \varphi \le f \right\} \in [0,+\infty].$$

Si $A \subset \mathbb{R}^d$ est une partie mesurable, on pose $\int_A f d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f\, \mathbb{1}_A d\lambda_d$.
Nous pouvons maintenant étendre la définition de l'intégrabilité aux fonctions à valeurs réelles ou complexes (et ensuite à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{C}^d$).

Soit$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Notons f_+ et f_- les applications

$$f_+ = \max(f, 0) \text{ et } f_- = \max(-f, 0).$$

Les applications f_+ et f_- sont mesurables, car f l'est, et sont à valeurs dans $[0, +\infty[$. On a alors les relations

$$f = f_+ - f_- \text{ et } |f| = f_+ + f_-.$$

Définition A.2.2 (Fonction intégrable à valeurs réelles). *Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite intégrable par rapport à la mesure λ_d, ou simplement intégrable, si f est mesurable et si $\int_{\mathbb{R}^d} |f| d\lambda_d < +\infty$. Dans ce cas, on appelle intégrale de f sur $\mathbb{R}^d$ le nombre réel, noté $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d$, défini par*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} f_+ d\lambda_d - \int_{\mathbb{R}^d} f_- d\lambda_d.$$

On note $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions intégrables à valeurs réelles.

Pour une fonction à valeurs complexes, son intégrale est tout simplement la somme de l'intégrale de sa partie réelle et de i fois l'intégrale de sa partie imaginaire.

Annexe B

Quelques rappels sur les fonctions intégrables

Ce chapitre rappelle les résulats de théorie de l'intégration sur $\mathbb{R}^d$ que nous utiliserons systématiquement. Le cadre général est celui de l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, qui est supposée connue, ainsi que les notions d'espaces mesurés, de mesure, d'ensemble et de fonction mesurables. On renvoie la lectrice qui voudra réviser ces notions à l'appendice A et à [3, 6]. Les notations sont celles de l'appendice A. En particulier, $\mathcal{L}^1(\Omega)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions intégrables sur Ω.

Les preuves sont omises. Le lecteur pourra consulter [3, 6].

B.1 Théorème de convergence dominée

Nous présentons le théorème de convergence dominée ou **TCD** en abrégé. Ce théorème affirme que $\int \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$ lorsque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite simplement convergente de fonctions intégrables dominée par une fonction positive intégrable g au sens suivant : $|f_n| \leq g$ pour tout n. Le fait qu'il suffise d'avoir une convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est un grand progrès par rapport aux énoncés qui peuvent être rencontrés dans le cadre de l'intégrale de Riemann. D'une manière générale, le théorème de convergence dominée est, comme nous le verrons, d'une grande utilité pratique.

Théorème B.1.1 (Théorème de convergence dominée)**.** *Soit $(f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables. On suppose que*

(i) il existe une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telle que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f presque partout sur $\mathbb{R}^d$;

(ii) il existe une fonction $g : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty[$ intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ presque partout sur $\mathbb{R}^d$.

Alors la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_n| = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Dans la pratique, la fonction f est souvent *définie* presque partout par $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et prolongée arbitrairement à $\mathbb{R}^d$. La fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est mesurable comme limite simple presque partout d'une suite de fonctions mesurables. Le fait qu'il soit suffisant, dans l'énoncé du TCD, d'avoir une convergence simple presque partout et une domination presque partout est typique des théorèmes d'interversion limite-intégrale dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

Exemple B.1.2. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{|x|\le n\}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

En effet, on applique le théorème de convergence dominée à $f_n(x) = \mathbb{1}_{\{|x|\le n\}} f$.

Exemple B.1.3. *Déterminons la limite lorsque n tend vers l'infini de la suite :*

$$\forall n \ge 1,\ u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

On a :

$$\forall n \ge 1,\ u_n = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t) \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) = \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t)\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, $f_n(t)$ tend vers $\mathrm{e}^{-t^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ lorsque n tend vers $+\infty$. De plus, pour tout $n \ge 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{t^2}{n} \le \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{n}}$, d'où

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \ge 1,\ |f_n(t)| \le \mathrm{e}^{-t^2}$$

qui est indépendante de n et intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc, on peut appliquer le TCD à $(f_n)_{n\ge1}$ pour obtenir

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Nous verrons plus loin un calcul de $\int_0^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t$ (qui vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

B.2 Intégrales à paramètre

Le théorème de convergence dominée implique les théorèmes suivants sur les intégrales à paramètres.

Théorème B.2.1 (Continuité sous le signe $\int$)**.** *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a \in \mathcal{O}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On considère une fonction f de $\mathcal{O} \times \Omega$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $x \in \mathcal{O}$, l'application partielle $f_x : y \mapsto f(x,y)$ est mesurable.*
2. *Pour presque tout $y \in \Omega$, l'application partielle $x \mapsto f(x,y)$ est continue au point a.*
3. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ telle que $|f(x,y)| \le g(y)$, pour tout $x \in \mathcal{O}$ et pour presque tout $y \in \Omega$.*

Alors il est possible de définir une application $F : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ par $F(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y$, et F est continue au point a.

La lectrice peu au fait des subtilités de la théorie de la mesure ne doit pas être effrayé par l'hypothèse 1. Rappelons que les fonctions continues et continues par morceaux sont mesurables. Dans ce cours, presque tous les exemples de fonctions mesurables seront de cette forme. Typiquement, une fonction continue sur $\mathcal{O} \times \Omega$ vérifie les hypothèses 1 et 2.

Exemple B.2.2. ***(Transformée de Fourier).*** *Soit $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, e^{-ix\cdot y}\mathrm{d}y,$$

où $x \cdot y$ est le produit scalaire euclidien de x et y. Alors $\hat{g}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.

Après la continuité, nous étudions la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.

Théorème B.2.3 (Dérivabilité sous le signe $\int$)**.** *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On considère une fonction f de $\mathcal{O} \times \Omega$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *Pour tout $x \in \mathcal{O}$, l'application partielle $f_x : y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur Ω.*
2. *Pour presque tout $y \in \Omega$, l'application partielle $f_y : x \mapsto f(x,y)$ est de classe C^1 sur $\mathcal{O}$.*
3. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ telle que*

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \ \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y) \right| \leq g(y)$$

pour tout $x \in \mathcal{O}$ et pour presque tout $y \in \Omega$.

Alors il est possible de définir une fonction $F : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ par $F(x) = \int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}y$. Cette fonction est de classe C^1 dans $\mathcal{O}$, et ses dérivées partielles sont données par

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Joint au théorème de continuité précédent, le théorème de dérivation permet de montrer qu'une fonction est de classe C^1.

Exemple B.2.4. *On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_0^1 e^{t^2 x}\,dt$. Alors G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$G'(x) = \int_0^1 t^2 e^{t^2 x}\,dt.$$

Exemple B.2.5. *Soit $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, tel que $\int_{\mathbb{R}^d} |y||g(y)|\mathrm{d}y < \infty$. Alors la transformé de Fourier $\hat{g}$ de g, définie dans l'exemple B.2.2, est de classe C^1 et*

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial x_k}(x) = -i \int_{\mathbb{R}^d} y_k g(y)\, e^{-ix\cdot y}\mathrm{d}y.$$

Exemple B.2.6. ***(Transformée de Laplace).*** *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On appelle transformée de Laplace de f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$F : x \mapsto \int_0^\infty e^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On montre que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa limite en $+\infty$ est nulle.

Remarque B.2.7. *Le théorème B.2.3 admet une généralisation aux dérivées d'ordre supérieures. Il faut pour cela remplacer C^1 par C^m dans l'hypothèse 2 du théorème, et remplacer la borne de l'hypothèse 3 par une borne sur les dérivées d'ordre m. Ainsi, si l'on suppose dans l'exemple B.2.5 que la fonction g est à support compact, alors la fonction g est de classe C^∞ et on peut calculer ses dérivées successives en dérivant par rapport à x sous le signe intégral.*

Nous sommes souvent amenés à démontrer la continuité ou la dérivabilité d'une fonction F définie par une intégrale sur un intervalle ouvert I. Il arrive alors, comme c'est le cas pour démontrer la dérivabilité de la transformée de Laplace, que l'hypothèse de domination nécessaire à l'application d'un théorème de régularité sous le signe $\int$ ne soit pas vraie sur tout l'intervalle I, mais seulement sur des sous-intervalles de I. Dans ce cas, on utilise le fait que la régularité d'une fonction (sa continuité ou sa dérivabilité) est une notion locale. En effet, si une fonction est régulière au voisinage d'un point, elle l'est aussi en ce point. Si on veut démontrer la

régularité de F en tout point de I, on commence par fixer un point $a \in I$. Alors, comme I est ouvert, a possède un voisinage $]\alpha,\beta[$ contenu dans I, voisinage sur lequel on peut tenter de démontrer l'hypothèse de domination voulue. Si cela est possible, les théorèmes de régularité sous le signe $\int$ s'appliquent et on démontre que F est régulière sur $]\alpha,\beta[$. En particulier, F est régulière en a.
Pour étudier des limites aux bords de l'intervalle ouvert où les théorèmes de régularité sous le signe $\int$ ne s'appliquent pas, comme la limite en $+\infty$ de la transformée de Laplace, on applique directement le théorème de convergence dominée ou celui de convergence monotone. On utilise pour cela la caractérisation séquentielle des limites.

Exemple B.2.8. *Etudions la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$. Soit $f : (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}$ définie sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Pour tout $x > 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et intégrable car*

$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = (-1)^n t^n \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}.$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, la fonction $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ est continue en x et intégrable en t et on a, si $a > 0$,

$$\forall x \geq a,\ \forall t \geq 0,\ \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq t^n \mathrm{e}^{-at}$$

qui est indépendante de x et intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc, par le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, on en déduit que

$$F : x \mapsto \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^∞ sur $[a,+\infty[$. Soit $x_0 > 0$. Il existe $a > 0$ tel que $x_0 \in [a,+\infty[$. Comme F est de classe C^∞ sur $[a,+\infty[$, elle l'est en x_0. Cela étant vrai pour tout $x_0 > 0$, F est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
On remarque que l'on a de plus $F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$ et on a

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

B.3 Les espaces L^p

On fixe ici un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$.
Soit $p \in [1,\infty)$. On note $\mathcal{L}^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f, mesurables de Ω dans $\mathbb{C}$, qui vérifient

$$\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Exercice B.3.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$. A quel condition sur α et p a-t-on $f \in \mathcal{L}^p\big(]0,1]\big)$? $f \in \mathcal{L}^p\big([1,+\infty[\big)$?*

Exercice B.3.2. *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

et $p \geq 1$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \iff p < 2$.

On appelle espace $L^p(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions égales presque partout qui sont dans $\mathcal{L}^p(\Omega)$. Plus précisement, on définit la relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par :

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; f = g \text{ p.p.}$$

et on définit $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)/\sim$. On identifie ensuite la classe d'équivalence de $f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ qui est un élément de $L^p(\Omega)$ avec son représentant f.
Pour $f \in L^p(\Omega)$, on pose

$$||f||_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors, si $p \in [1, \infty[$, $||\cdot||_p$ est une norme sur $L^p(\Omega)$ pour lequel cet espace est complet.
On définit également les espaces $\mathcal{L}^\infty$ et L^∞ comme suit. L'espace $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions essentiellement bornées sur Ω, c'est à dire des fonctions mesurables telles qu'il existe $M > 0$ tel que $\{x \in \Omega \;:\; |f(x)| > M\}$ est de mesure nulle. La borne inférieure de tous les M vérifiant cette propriété est notée $\|f\|_\infty$. On définit ensuite

$$L^\infty(\Omega) = \mathcal{L}^\infty(\Omega)/\sim,$$

en identifiant les fonctions essentiellement bornées qui sont égales presque partout.

Dans les espaces L^p $(1 \le p < +\infty)$ on a un théorème de convergence dominée en remplaçant "intégrable" par $g \in L^p$ et la convergence a alors lieu dans L^p.

Proposition B.3.3 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient p et q deux exposants conjugués, i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, le produit fg est dans $L^1(\Omega)$, et*

$$||fg||_1 \le ||f||_p \, ||g||_q.$$

Exemple B.3.4. *Supposons Ω de mesure de Lebesgue fini. Soit $(p, r) \in [1, \infty]^2$ avec $p < r$. Alors*

$$L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

En effet, si $f \in L^r(\Omega)$, on écrit $|f|^p = \mathbb{1}_\Omega |f|^p$. Donc

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx = \||f|^p\|_1 \le \||f|^p\|_{\frac{r}{p}} \|\mathbb{1}_\Omega\|_q,$$

où q est l'exposant conjugué de $\frac{r}{p}$: $\frac{1}{q} + \frac{p}{r} = 1$. Or, puisque Ω est de mesure finie,

$$\int \mathbb{1}_\Omega^q(x) \, dx = |\Omega|,$$

où $|\Omega|$ est la mesure de Lebegue de Ω et donc $\mathbb{1}_\Omega \in L^q$ avec $\|\mathbb{1}_\Omega\|_q = |\Omega|^{1/q}$. Finalement, on obtient que $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_p \le \|f\|_r |\Omega|^{\frac{1}{pq}} = \|f\|_r |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}.$$

On définit maintenant les espaces $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ qui joueront un rôle important dans la théorie des distributions :

Définition B.3.5. *Soit $p \in [1, \infty]$. Une fonction mesurable f sur Ω est un élément de $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ quand pour tout compact $K \subset \Omega$, $\mathbb{1}_K f \in \Omega$.*

Exemple B.3.6. *Soit $p \in [1, \infty]$. La fonction $x \mapsto 1/x$ est un élément de $L^p_{\mathrm{loc}}(]0, +\infty[)$, mais pas de $L^p(]0, +\infty[)$.*

On vérifie facilement que $L^p_{\text{loc}}(\Omega) \subset L^q_{\text{loc}}(\Omega)$ quand $p > q$.
Il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ tel que $\left(L^p_{\text{loc}}(\Omega), \|\cdot\|\right)$ est un espace de Banach. On peut en revanche définir une notion de convergence sur L^p_{loc}.

Définition B.3.7. *Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, et $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. On dit que $(f_n)_n$ tend vers f dans $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ (ou que cette suite converge localement dans L^p vers f), quand pour tout compact K de Ω, $(\mathbb{1}_K f_n)_n$ converge vers $\mathbb{1}_K f$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \to \infty$.*

Exemple B.3.8. *Soit, pour $x > 0$,*

$$f_n(x) = \frac{1}{x + 1/n}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Alors pour tout $p \in [1, \infty]$, $(f_n)_n$ tend vers f dans $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.

B.4 Théorème de Fubini

Lorsque l'on calcule l'intégrale d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ de plusieurs variables, le premier outil auquel on doit penser est le théorème de Fubini. Celui s'énonce sous la forme suivante :

Théorème B.4.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^{d+p})$. Alors les fonctions suivantes sont définies presques partout*

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\mathrm{d}y \quad \textit{et} \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\mathrm{d}x$$

et sont respectivement dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^1(\mathbb{R}^p)$. De plus, on la relation :

$$\int_{\mathbb{R}^{d+p}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)dx \right) dy. \tag{B.1}$$

Une variante de ce théorème, le théorème de Fubini-Tonelli, concerne les fonctions positives :

Théorème B.4.2. *Soit f mesurable sur $\mathbb{R}^{d+p}$, à valeurs dans $[0, \infty]$. Alors*

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\mathrm{d}y \quad \textit{et} \quad y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\mathrm{d}x$$

sont mesurables presque partout et les égalités (B.1) sont vérifiées.

B.5 Théorème du changement de variable

L'autre outil essentiel permettant de calculer une intégrale est le théorème de changement de variable.

On note pour $\varphi : U \to \mathbb{R}^d$ une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ et pour $x \in U$, la matrice jacobienne de φ en x par $J_\varphi(x)$. C'est la matrice $\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right]_{1 \le i,j \le d}$ de la différentielle de φ au point x dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Théorème B.5.1. *Soit $\varphi : U \to V = \varphi(U)$ un C^1-difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. Alors,*

1. *Pour toute fonction g mesurable et positive, $g : \varphi(U) \to [0, +\infty]$,*

$$\int_{\varphi(U)} g(y)\mathrm{d}y = \int_U g(\varphi(x))|\det(J_\varphi(x))|\mathrm{d}x.$$

2. *De plus, une fonction mesurable $f : \varphi(U) \to \mathbb{C}$ est intégrable sur $\varphi(U)$ si et seulement si $(f \circ \varphi)|\det(J_\varphi(\cdot))|$ est intégrable sur U et on a*

$$\int_{\varphi(U)} f(y)\mathrm{d}y = \int_U f(\varphi(x))|\det(J_\varphi(x))|\mathrm{d}x.$$

Exemple B.5.2. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda > 0$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)dx = \lambda^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)dy.$$

Les changements de variable qui interviennent le plus souvent sont le passage en coordonnées polaires et les changements de variable linéaires.
Pour le changement de variables en coordonnées polaires on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{]0,2\pi[\times]0,+\infty[} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

En effet, le changement en polaire en dimension 2 est donné par le difféomorphisme φ : $(r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ dont le Jacobien en tout point est donné par :

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r.$$

On remarquera que J_φ n'est un difféomorphisme de $(0,2\pi)\times]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}^2$, mais un difféomorphisme de $(0,2\pi)\times]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \geq 0\}$. En pratique, cela ne pose pas de problème, l'ensemble $\{(x,0),\ x \geq 0\}$ étant de mesure de Lebesgue nulle.

Exemple B.5.3. *Calculons l'intégrale gaussienne : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$. Pour cela on commence par utiliser Fubini pour justifier que*

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Puis on effectue un changement de variables en coordonnées polaires :

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^\infty = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi.$$

Donc : $I = \sqrt{\pi}$.

Il existe des variantes de ce changement de variable en coordonnées supérieures (coordonnées sphériques). Par exemple, si f est une fonction radiale, qui ne dépend que de la norme euclidienne $r = |x|$ de x (i.e. $f(x) = \tilde{f}(|x|)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = c(d) \int_0^{+\infty} \tilde{f}(r)r^{d-1}dr,$$

où $c(d)$ est le volume de la sphère de dimension $d-1$.

Exemple B.5.4. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors (en notant $B(0,1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^d$),*

1. *$\int_{B(0,1)} \frac{1}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha < d$.*
2. *$\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,1)} \frac{1}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x$ est convergente si et seulement si $\alpha > d$.*

En effet, il suffit d'effectuer un changement de variables en polaires pour se ramener au cas du critère de Riemann en dimension 1*. On a alors, avec* $dx = r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$*,*

$$\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{r^\alpha} r^{d-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

La convergence de cette intégrale revient donc à celle de $\int_0^1 \frac{1}{r^{\alpha+1-d}}\mathrm{d}r$ *et par le critère de Riemann, elle converge si et seulement si* $\alpha+1-d<1$ *donc* $\alpha<d$*. Idem pour l'autre cas.*

Lorsque l'on utilise Fubini ou le changement de variable on procède en général en deux temps : on applique le théorème de Fubini-Tonelli à $|f|$ pour justifier de l'intégrabilité puis on utilise à nouveau le théorème pour faire le calcul effectif de l'intégrale. Rappelons aussi que ces théorèmes, tout comme la formule d'intégration par parties, ne permettent pas de calculer directement une intégrale en général (sauf cas particuliers) mais permettent juste de se ramener à un calcul de primitive usuelle.

Pour l'ensemble des démonstrations et plus de précisions sur la théorie de l'intégrale de Lebesgue, nous renvoyons à [3, 6].

Annexe C

Partitions de l'unité

Nous commençons par donner un lemme technique, le lemme des partitions de l'unité, qui nous sera très utile par la suite. C'est un outil permettant de rendre globale une propriété locale.

Lemme C.0.1. *Soit K un compact, $K \subset \Omega$ et $K \subset \bigcup_{j=1}^{p} \Omega_j$ avec $(\Omega_j)_{1 \le j \le p}$ une famille finie d'ouverts inclus dans Ω. Alors, il existe des fonctions $(\chi_j)_{1 \le j \le p}$ dans $C_0^\infty(\Omega)$ telles que :*

$$\forall j \in \{1, \dots, p\},\ 0 \le \chi_j \le 1, \quad \text{supp } (\chi_j) \subset \Omega_j, \quad \textit{et} \quad \forall x \in K, \sum_{j=1}^{p} \chi_j(x) = 1.$$

Démonstration : Compte tenu de l'importance de ce résultat, nous donnons sa démonstration complète pour la lectrice intéressée. Elle ne sera toutefois pas demandée en examen en MACS 2. La preuve repose sur un argument de compacité, et une application astucieuse de la proposition 2.3.16 (existence de fonctions plateaux).

On montre d'abord qu'il existe des compacts $S_j \subset \Omega_j$, $j = 1 \dots p$ tels que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{p} S_j. \tag{C.1}$$

Soit $x \in K$. Puisque $K \subset \bigcup_{j=1}^{p} \Omega_j$, il existe $j(x) \in \{1, \dots, p\}$ tel que $x \in \Omega_{j(x)}$. Puisque Ω_j est ouvert, il existe $\varepsilon(x) > 0$ tel que $B(x, \varepsilon(x)) \subset \Omega_{j(x)}$. On a bien sûr

$$K \subset \bigcup_{x \in K} B\left(x, \frac{\varepsilon(x)}{2}\right).$$

L'ensemble K étant compact, il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue, et on peut donc extraire de K un sous-ensemble fini L tel que

$$K \subset \bigcup_{x \in L} B\left(x, \frac{\varepsilon(x)}{2}\right).$$

On pose, pour $j \in \{1, \dots, p\}$,

$$S_j = \bigcup_{\substack{x \in L \\ j(x) = j}} \overline{B\left(x, \frac{\varepsilon(x)}{2}\right)}.$$

C'est une réunion finie de compacts de Ω_j, donc un compact de Ω_j. De plus, (C.1) est vérifié.

On utilise alors la proposition 2.3.16 (existence de fonction plateau), qui donne, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, une fonction $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, valant 1 sur S_j. Enfin, on pose $\chi_1 = \psi_1$, $\chi_2 = (1 - \psi_1)\psi_2$, $\chi_3 = (1 - \psi_1)(1 - \psi_2)\psi_3$, ..., $\chi_J = (1 - \psi_1)(1 - \psi_2) \ldots (1 - \psi_{J-1})\psi_J$. On a bien $\chi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$. On vérifie de plus, par récurrence sur J,

$$1 - \sum_{j=1}^{J} \chi_j = \prod_{j=1}^{J} (1 - \psi_j),$$

et donc que $\sum_{j=1}^{J} \chi_j$ vaut 1 dès que l'un des ψ_j est égal à 1, ce qui est le cas sur K.

□

Annexe D

Quelques notations

Soit A un ensemble et $B \subset A$. La *fonction indicatrice*, ou *fonction caractéristique* de B, est la fonction $\mathbb{1}_B : A \to \{0,1\}$ définie par

$$\begin{cases} \mathbb{1}_B(x) = 1 & \text{si } x \in B \\ \mathbb{1}_B(x) = 0 & \text{si } x \notin B. \end{cases}$$

On note $A \setminus B$ le complémentaire de B dans A :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur A, on notera parfois cet ensemble B^c.
Soit E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$. On note $d(E,F)$ leur distance :

$$d(E,F) = \inf\{|x-y| \; : \; x \in E, \; y \in E\},$$

et $E + F$ leur somme

$$E + F = \Big\{x + y \; : \; x \in E, \; y \in F\Big\}.$$

La notation multi-indice ∂^α, $\alpha \in \mathbb{N}^d$, est définie en § 2.1.
$\mathcal{D}(\Omega)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$: cf définition 2.3.5. On note $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, lorsque cet ensemble est considéré comme l'espace vectoriel des fonctions test pour l'espace vectoriel $\mathcal{E}'(\Omega)$ des distributions à support compact, cf §4.3.
Si a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}^d$, $[a,b]$ est le segment :

$$[a,b] = \{ta + (1-t)b, \; t \in [0,1]\}.$$

Quand $d = 1$ et $a < b$, on retrouve la notation usuelle $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}, \; a \leq x \leq b\}$. Mais on pourra aussi employer la même notation pour $a > b$ auquel cas $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}, \; b \leq x \leq a\}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$. On note $B(x,r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r :

$$B(x,r) = \Big\{y \in \mathbb{R}^d, \; |x-y| < r\Big\},$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$:

$$|(x_1, \ldots, x_d)|^2 = \sum_{j=1}^{d} x_j^2.$$

On termine cet appendice par l'alphabet grec, qu'il est très utile de connaître pour lire et écrire des mathématiques, en particulier dans ce cours.

Minuscule	Majuscule	Nom	Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	alpha	ν	N	nu
β	B	bêta	ξ	Ξ	xi
γ	Γ	gamma	o	O	omicron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε	E	epsilon	ρ	P	rhô
ζ	Z	zêta	σ	Σ	sigma
η	H	êta	τ	T	tau
θ	Θ	thêta	υ	Υ	upsilon
ι	I	iota	ϕ	Φ	phi
κ	K	kappa	χ	X	khi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	mu	ω	Ω	oméga