Institut Galilée **2023-2024**
Filière M1
Analyse fonctionnelle - Option "Fondamentale"

Feuille de TD 1 : Opérateurs bornés

Exercice 1

Soit $H = L^2(X, \mathbb{C})$ et soit $K \in L^2(X \times X, \mathbb{C})$. Soit T_K l'opérateur défini sur H par

$$\forall u \in H,\ \forall x \in X,\ T_K u(x) = \int_X K(x,y)u(y)dy.$$

1. Montrer que T_K est bien défini.
2. Montrer que $\|T_K\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|K\|_{L^2(X\times X,\mathbb{C})}$.
3. Calculer l'adjoint de T_K.

Exercice 2

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint, alors $r(T) = \|T\|$.

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert et soit U un opérateur unitaire sur H.
1. Montrer que $H = \mathrm{Ker}(U - I) \oplus \overline{\mathrm{Im}\ (U - I)}$.
2. Soit P le projecteur orthogonal d'image $\mathrm{Ker}\ (U - I)$. Soit, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{I + U + \ldots + U^n}{n+1}.$$

Montrer que, pour tout $u \in H$, $S_n u \to Pu$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4 - Trace d'un opérateur positif

Soient H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H.
Soit T un opérateur positif sur H, *i.e.* T est borné, auto-adjoint et pour tout $u \in H$, $(Tu|u) \in \mathbb{R}_+$.
On admettra qu'il existe un unique opérateur positif S tel que $S^2 = T$. On le note $T^{\frac{1}{2}}$.
On pose

$$\mathrm{tr}\ T = \sum_{n=1}^{\infty}(Te_n|e_n) \in [0, +\infty].$$

Le réel tr T est appelé trace de l'opérateur T.
1. Montrer que la trace est indépendante du choix de la base hilbertienne de H.
2. Montrer que, pour tous opérateurs positifs T et S, $\mathrm{tr}\ (T + S) = \mathrm{tr}\ T + \mathrm{tr}\ S$ et que, pour tout $\lambda \geq 0$, $\mathrm{tr}\ (\lambda T) = \lambda\ \mathrm{tr}\ T$.
3. Montrer que si T et S sont deux opérateurs positifs tels que $0 \leq T - S$, alors $\mathrm{tr}\ S \leq \mathrm{tr}\ T$.
4. Montrer que, pour tout opérateur unitaire U, $\mathrm{tr}\ (UTU^{-1}) = \mathrm{tr}\ (U^{-1}TU) = \mathrm{tr}\ T$.

Exercice 5

Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que $\sigma(M_\varphi) = \mathrm{Im\ ess}\ \varphi$ où M_φ est l'opérateur de multiplication par φ sur $L^2(\mathbb{R})$ et

$$\mathrm{Im\ ess}\ \varphi = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \forall\varepsilon > 0,\ \mathrm{Leb}(\varphi^{-1})(D(\lambda, \varepsilon)) > 0\}.$$

En déduire que si $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $\sigma(M_\varphi) = \varphi([a, b])$.

Exercice 6

Soit E l'espace $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ des suites bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, muni de la norme:

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|.$$

Soit T l'opérateur sur E défini par :

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (Tu)_n = u_{n+1}.$$

1. Calculer la norme de T.
2. Montrer que tout nombre complexe de module 1 est valeur propre de T.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$. Soit $u \in E$. On note $(T - \lambda)u = f$. Pour tout entier $p \geq 1$, exprimer u_n en fonction de $f_{n-1}, \ldots, f_{n-p}$ et de u_{n-p}. Que devient cette expression lorsque p tend vers $+\infty$? En déduire que λ n'appartient pas au spectre de T.
4. En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer le spectre de T.

On considère le sous-espace fermé F de E constitué des suites u telles que $u_n = 0$ pour tout $n > 0$. Alors, $T(F) \subset F$ et on désigne par T_F l'opérateur induit par T sur F.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$ et $\lambda \neq 0$. En utilisant l'expression de $(T - \lambda)^{-1}$ trouvée à la question 3, montrer que λ appartient au spectre de T_F.

6. En utilisant les résultats des questions 1 et 5, déterminer le spectre de T_F. Comparer avec le résultat obtenu à la question 4.

Exercice 7

On désigne par E l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs complexes, muni de la norme infinie $|| \, ||_\infty$.
On note T_0 l'opérateur défini sur E par :

$$\forall u \in E,\ \forall x \in [0,1],\ T_0u(x) = xu(x).$$

Soit $f \in E$. On définit l'opérateur L par :

$$\forall u \in E,\ Lu = \int_0^1 f(x)u(x)dx.$$

Enfin si $g \in E$ on considère l'opérateur T défini par:

$$\forall u \in E,\ Tu = T_0u + (Lu)g.$$

1. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrez que si $g(\lambda) = 0$, alors $T - \lambda$ n'est pas surjectif. Dans le cas où $g(\lambda) \neq 0$, montrez que la fonction $h \ : \ x \mapsto \sqrt{|x-\lambda|}$ n'est pas dans l'image de $T - \lambda$.
En déduire que le spectre $\sigma(T)$ de T contient $[0,1]$.
2. Démontrez que $\sigma(T) \setminus [0,1]$ est constitué de valeurs propres dont les sous-espaces propres sont de dimension 1. Caractérisez ces valeurs propres comme l'ensemble des solutions d'une équation $F(\lambda) = 0$ où F est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ que l'on exprimera à l'aide de f et de g. En déduire que $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ est discret.
3. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 1$ et $g(x) = \alpha$, α étant un réel non nul. Déterminez $\sigma(T)$.

Exercice 8

Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On note $\sigma(A)$ son spectre.
1. On suppose $A \geq 0$ au sens où :

$$\forall \phi \in \mathcal{H}, (\phi, A\phi) \geq 0$$

a. Soit $x < 0$. Etablir que :

$$\forall \phi \in \mathcal{H},\ ||(A-x)\phi||^2 \geq x^2||\phi||^2$$

En déduire que $A - x \ : \ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est injective.
b. Montrer que son image est dense. Pour cela on calculera l'orthogonal de Im A.
c. En déduire que l'application $A - x$ est surjective donc bijective.
On note $R_A(x) = (A-x)^{-1} \ : \ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ son application inverse.
d. Majorer $||R_A(x)||$.
e. Etablir l'implication $A \geq 0 \Rightarrow \sigma(A) \subset [0, +\infty)$.
2. Montrer l'implication réciproque à l'aide du théorème spectral.

Exercice 9

Version discrète du lemme de Schnoll.

Soit $\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace de Hilbert des suites $\phi = (\phi_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes de carré sommable. On considère dans $\ell^2(\mathbb{N})$ l'opérateur de multiplication V par une suite réelle $v = (v_n)_{n\geq 0}$ et l'opérateur de Schrödinger $H = H_0 + V$ défini par :

$$(H\phi)_n = \begin{cases} -\phi_{n+1} - \phi_{n-1} + v_n\phi_n & \text{si } n \geq 1 \\ -\phi_1 + v_0\phi_0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Soit $G(z) = (H-z)^{-1}$ la résolvante de H en $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et soit, pour $m, n \in \mathbb{N}$:

$$G_{m,n} = (\delta_m | G(z)\delta_n)$$

où $\delta_m = (\delta_{m,k})_{k\geq 0}$ avec $\delta_{m,k} = 1$ si $k = m$ et $\delta_{m,k} = 0$ si $k \neq m$. Dans toute la suite on suppose que la suite v est bornée.

1. Montrer que H est auto-adjoint borné.
2. Etablir l'estimation suivante de la norme de la résolvante :

$$||G(z)|| \leq \frac{1}{|\text{Im}z|} \tag{1}$$

3. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $\psi(\lambda) = (\psi_n(\lambda))$ la solution de $H\psi = \lambda\psi$, $\psi_0 = 1$. On note $E(\lambda)$ la famille spectrale associée à H. On note $\mathrm{d}\rho(\lambda)$ la mesure spectrale de H définie par :

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ (\delta_m | E(\lambda)\delta_n) = \psi_m(\lambda)\psi_n(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)$$

Exprimer alors $G_{m,n}(z)$ sous la forme d'une intégrale du type $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)$.
4. Etablir que :

$$\text{Im } G_{n,n}(\mathrm{i}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi_n^2(\lambda)}{\lambda^2+1}\mathrm{d}\rho(\lambda) \leq 1 \tag{2}$$

5. Soit $\varepsilon > 0$ et soit :

$$\theta(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi_n^2(\lambda)}{(\lambda^2+1)(1+n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})^2}$$

Etablir que : $\theta(\lambda) < +\infty$ pour ρ-presque tout λ.
Indication : Estimer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \theta(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)$ *grâce à (2).*
6. Conclure : Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe pour ρ-presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante $C_{\lambda,\varepsilon}$ telle que pour tout $n \geq 0$:

$$|\psi_n(\lambda)| \leq C_{\lambda,\varepsilon}(1+n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

Ainsi chaque fonction propre généralisée $\psi(\lambda)$ est polynomialement bornée en n pour ρ-presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$.