Université Sorbonne Paris Nord
Institut Galilée – M1 Mathématiques 9 novembre 2023

Examen Partiel d'Analyse Fonctionnelle – Tronc Commun

Durée de l'épreuve : 1 heure 30.

Seuls les documents de cours et TD sont autorisés. Calculatrices et moyens de communication interdits.

NB: Ne pas hésiter à admettre le résultat d'une question pour pouvoir traiter la suite d'un exercice.

Exercice 1. Soit $E = C^1([0,1],\mathbb{C})$ l'espaces des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continûment dérivables. Soit $F = C([0,1],\mathbb{C})$ l'espace des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues. On munit ces deux espaces de la norme infinie définie par : $\forall f \in F,\ ||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Soit $T : E \to F$ l'application définie par : $\forall f \in E,\ T(f) = f'$.

On note $G(T) = \{(f, Tf) \mid f \in E\}$ le graphe de T.

1. Montrer que $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.
2. Montrer que T n'est pas continue.
3. Expliquer ce résultat.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert réel. Déterminer une expression de la projection orthogonale sur B, la boule unité fermée de H.

Exercice 3. Soit $(H, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert dont on note $||\cdot||$ la norme associée à son produit scalaire. Soit F un sous-espace fermé de H, non réduit à l'espace nul $\{0\}$. Si $x \in H$, on appelle distance de x à F le réel positif : $d(x,F) = \inf\{||x-y|| \mid y \in F\}$.

1. On note p_F la projection orthogonale de H sur F. Montrer que $d(x,F) = ||x - p_F(x)||$.
2. On suppose que $(H, (\cdot|\cdot))$ est l'espace $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ des suites de nombres complexes de carré sommable muni du produit scalaire usuel : $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}},\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{x_n} y_n$. Pour $N \geq 0$ un entier fixé, on pose $M_N = \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}),\ \sum_{n=0}^{N} x_n = 0\right\}$.
   (a) Vérifier que M_N est un sous-espace fermé de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.
   (b) Déterminer le supplémentaire orthogonal de M_N.
   (c) Donner la distance de l'élement $e_0 = (1,0,0,\ldots)$ à M_N.

Exercice 4. Soit F l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui sont 2-lipschitziennes et qui vérifient $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$.

1. Montrer que F est une partie compacte de $(C([0,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ où $C([0,1],\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et : $\forall f \in C([0,1],\mathbb{R}),\ ||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
2. En déduire qu'il existe $f \in F$,

$$\int_0^1 f(x)dx = \sup_{g\in F} \int_0^1 g(x)dx.$$

Université Sorbonne Paris Nord
Institut Galilée – M1 Mathematics 2023/11/09

Partiel Exam of Functional Anaysis – Common Part

Duration : 1 hour and 30 minutes.

Only the documents from the lectures and the exercise classes are authorized. Calculators and communication devices are not allowed.

NB: Do not hesitate to admit the result of a question to treat the subsequent ones.

Exercise 1. Let $E = C^1([0,1],\mathbb{C})$ be the space of functions of $[0,1]$ in $\mathbb{C}$ which are continuous. Let $F = C([0,1],\mathbb{C})$ be the space of functions of $[0,1]$ in $\mathbb{C}$ which are continuous. These two spaces are endowed with the infinite norm defined by : $\forall f \in F,\ ||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Let $T : E \to F$ be the application defined by : $\forall f \in E,\ T(f) = f'$.

Let $G(T) = \{(f, Tf) |\ f \in E\}$ denote the graph of T.

1. Show that $G(T)$ is closed in $E \times F$.
2. Show that T is not continuous.
3. Explain the result.

Exercise 2. Let H be a real Hilbert space. Determine an expression for the orthogonal projection onto B, the closed unit ball of H.

Exercise 3. Let $(H, (\cdot|\cdot))$ be a Hilbert space whose norm $||\cdot||$ is associated with its scalar product. Let F be a closed subspace of H, not reduced to the null space $\{0\}$. If $x \in H$, the distance from x to F is the real number: $d(x, F) = \inf\{||x - y|| \mid y \in F\}$.

1. Let p_F be the orthogonal projection of H onto F. Show that $d(x, F) = ||x - p_F(x)||$.
2. It is assumed that $(H, (\cdot|\cdot))$ is the space $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ of square-summable sequences of complex numbers endowed with the usual scalar product: $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}},\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{x_n} y_n$. For $N \geq 0$ a fixed integer, we set $M_N = \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}),\ \sum_{n=0}^{N} x_n = 0\right\}$.
   (a) Verify that M_N is a closed subspace of $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.
   (b) Determines the orthogonal supplementary of M_N.
   (c) Give the distance of the element $e_0 = (1, 0, 0, \ldots)$ to M_N.

Exercise 4. Let F be the set of functions from $[0,1]$ into $\mathbb{R}$ which are 2-lipschitzian and which verify $f(0) = 0$ and $f(1) = 0$.

1. Show that F is a compact part of $(C([0,1],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ where $C([0,1],\mathbb{R})$ is the space of continuous functions from $[0,1]$ into $\mathbb{R}$ and : $\forall f \in C([0,1],\mathbb{R}),\ ||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
2. From this, deduce that there exists $f \in F$,

$$\int_0^1 f(x)dx = \sup_{g\in F} \int_0^1 g(x)dx.$$