Institut Galilée **2023-2024**
Filière M1
Analyse fonctionnelle

Feuille de TD 2 : Espaces de Hilbert

Exercice 1

On considère $\mathcal{H} = L^2([0,1],\mathbb{R})$ qui, munit du produit scalaire usuel, est un espace de Hilbert. On considère

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathcal{H} \\ t & \mapsto & \mathbf{1}_{[0,t]}. \end{array}$$

où $\mathbf{1}_{[0,t]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,t]$, qui vaut 1 sur $[0,t]$ et 0 partout ailleurs.

1. Montrer que φ est continue. Montrer que φ est nulle part dérivable.

2. Montrer que si $0 \leq s < s' \leq t < t' \leq 1$, alors $\varphi(s') - \varphi(s)$ est orthogonale à $\varphi(t') - \varphi(t)$.

Exercice 2

On définit une application $\varphi : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$ par

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})} Q(\mathrm{e}^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]$.

2. Montrer que la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire précédent.

3. Soit $Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. Calculer $\|Q\|^2$.

4. On pose

$$M = \sup_{|z|=1} |Q(z)|$$

Montrer que $M \geqslant 1$ et étudier le cas d'égalité.

Exercice 3

On définit une application $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Soient p et q deux entiers naturels. Calculer $\varphi(X^p, X^q)$.

3. Déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2 - (at+b))^2\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 4

Soit $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ l'espace des suites de carré sommable, munit de la norme définie par :

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}),\ ||(x_n)||_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ fixé, on note M_N le sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ formé des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{N} x_n = 0$.

1. Montrer que l'application $T : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{N} x_n$ est une forme linéaire continue sur $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Que peut-on en déduire sur M_N?

2. Justifier que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) = M_N \overset{\perp}{\oplus} M_N^{\perp}$.

3. Soit $E = \{(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall 0 \leq i < j \leq N,\ y_i = y_j \text{ et } \forall n > N,\ y_n = 0\}$.

a. Montrer que $E \subset M_N^{\perp}$.

b. Montrer que $M_N^{\perp} = E$. *Indication : on remarquera que pour $0 \leq i < j \leq N$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_i = 1$, $x_j = -1$ et $x_n = 0$ pour $n \neq i,j$ appartient à M_N.*

Exercice 5

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $H = L^2(\Omega)$. Soit $A = \left\{f \in H;\ \int_\Omega f(x)dx \geq 1\right\}$.

1. Montrer que A est un convexe fermé de H.
2. Soit $g \in H$. Montrer que le minimum $\min_{f\in A} \|g - f\|_H$ est atteint en un unique élément $\bar{g} \in A$.
3. Calculer $\bar{g}$ pour $g = 0$ (on utilisera la caractérisation d'une projection).

Exercice 6

Soit $(H, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et A un endomorphisme continu de H.
1. Soit $y \in H$ fixé.
a. Montrer que la forme linéaire $\phi_y : x \mapsto \langle Ax|y\rangle$ est continue.
b. En déduire qu'il existe un vecteur A^*y tel que :

$$\forall x \in H, \quad \langle Ax|y\rangle = \langle x|A^*y\rangle.$$

2. Montrer que l'application de H dans H, $y \mapsto A^*y$ est un endomorphisme continu de H. On appelle A^* l'adjoint de A.
3. Vérifier que $(A^*)^* = A$ et que $|||A^*||| = |||A|||$.
4. Soit $H = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}.$$

Calculer la matrice de A^* dans la base canonique en fonction de celle de A.
5. Soit T l'application linéaire définie sur $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ par

$$\forall u \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}),\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (Tu)_n = u_{n+1}.$$

a. Justifier que T est continue.
b. Calculer l'adjoint T^* de T.

Exercice 7

Soit Ω un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$. On définit l'espace de Bergman de Ω par :

$$\mathcal{A}^2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega, \mathrm{d}\lambda) \mid f \text{ est holomorphe dans } \Omega\}.$$

où $L^2(\Omega, \mathrm{d}\lambda)$ désigne l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω pour $\mathrm{d}\lambda$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}$ identifié à $\mathbb{R}^2$. On munit $L^2(\Omega, \mathrm{d}\lambda)$ du produit scalaire hermitien usuel $(f, g) \mapsto \int_\Omega f\bar{g}\mathrm{d}\lambda$ et de la norme associée $||\cdot||_2$. On munit aussi $\mathcal{A}^2(\Omega)$ des restrictions de ce produit scalaire et de cette norme.

Pour $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ on note $\overline{B}(z, r) = \{w \in \mathbb{C}\ |w - z| \leq r\}$.
1.a. Soient $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\int_{\overline{B}(z,r)} (w - z)^n \mathrm{d}\lambda(w) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ \pi r^2 & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}$$

b. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. On suppose que $\overline{B}(z, r) \subset \Omega$. Montrer que pour toute $f \in \mathcal{A}^2(\Omega)$,

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{B}(z,r)} f(w)\mathrm{d}\lambda(w).$$

c. Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $d(z, \Omega^c)$ la distance de z au complémentaire de Ω. Montrer que :

$$\forall f \in \mathcal{A}^2(\Omega),\ \forall z \in \Omega,\ \forall r > 0,$$

$$\left(d(z, \Omega^c) > r \ \Rightarrow\ |f(z)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}}||f||_2\right).$$

2.a. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{A}^2(\Omega)$. Soit K un compact de Ω. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K.
b. En déduire qu'il existe f holomorphe sur Ω telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout compact Ω et a fortiori simplement vers f sur Ω.
c. Montrer que $\mathcal{A}^2(\Omega)$ munit du produit scalaire de $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
3. Pour $z \in \Omega$ on pose

$$\delta_z \ : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}^2(\Omega) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & f(z) \end{array}$$

a. Montrer que pour tout $z \in \Omega$, δ_z est une forme linéaire continue sur $\mathcal{A}^2(\Omega)$.
b. Pour tout $z \in \Omega$, montrer l'existence de $K_z \in \mathcal{A}^2(\Omega)$ telle que

$$\forall f \in \mathcal{A}^2(\Omega),\ f(z) = \int_\Omega f(w)\overline{K_z(w)}\mathrm{d}\lambda(w).$$

4. On note pour tout $(z, w) \in \Omega^2$, $K_\Omega(w, z) = K_z(w)$.
a. Montrer que, pour tout $(z, w) \in \Omega^2$, $K_\Omega(z, w) = \overline{K_\omega(w, z)}$.
b. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{A}^2(\Omega)$. Soit $z \in \Omega$. Montrer que

$$K_z = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{e_n(z)}e_n$$

avec convergence de la série dans $\mathcal{A}^2(\Omega)$.
5. On choisit maintenant l'exemple du disque unité ouvert. On prend $\Omega = D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in D$, on pose :

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n.$$

Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{A}^2(D)$.
Indication : on pourra utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Bessel pour montrer le caractère total de la famille : si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée d'un espace de Hilbert $(\mathcal{H}, (\cdot|\cdot))$, alors

$$x \in \overline{\mathrm{Vect}((e_n)_{n\in\mathbb{N}})} \ \Leftrightarrow\ ||x||^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x|e_n)|^2.$$

b. Calculer la fonction $(w, z) \mapsto K_D(w, z)$.