

Feuille de TD 3 : Espaces L^p

Exercice 1 Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 < p < +\infty$.

1. Montrer que l'on peut définir, pour tout $x \geq 0$,
 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
2. Justifier que $F(x) =_{+\infty} \mathcal{O}(x^{(p-1)/p})$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\left(\int_a^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

4. En déduire que $F(x) =_{+\infty} o(x^{(p-1)/p})$.

Exercice 2 Pour $1 \leq p < +\infty$, soit $\tau_a : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$ définie, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$, par $\tau_a(f)(x) = f(x - a)$.
 Démontrer que, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a(f) - f\|_p = 0.$$

Indication : on pourra commencer par le cas où f est une fonction continue à support compact.

Exercice 3 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$Tf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^1 f(x-y)dy$$

1. Montrer que, si f est continue à support compact, Tf est continue.
2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $(Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Tf uniformément sur \mathbb{R} . En déduire que Tf est continue sur \mathbb{R} .
3. En déduire que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément unité.

Exercice 4 Soient $f, g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ données par $f = \mathbf{1}_{]-1, 0[}$ et $g = \mathbf{1}_{]0, 1[}$

1. Soit $p \in [1, \infty[$. Calculer $\|f\|_p$, $\|g\|_p$, $\|f + g\|_p$ et $\|f - g\|_p$.
2. En déduire que si $p \neq 2$, alors $L^p(]-1, 1[)$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 5 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie.

1. Montrer que pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Indication : on pourra montrer que la limsup est inférieure à $\|f\|_\infty$ et que pour tout $\varepsilon > 0$, la liminf est supérieure à $\|f\|_\infty - \varepsilon$.

2. Soit

$$f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega).$$

On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\|f\|_p \leq C$. Montrer que $f \in L^\infty(\Omega)$.

3. Trouver $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega)$ tel que $f \notin L^\infty(\Omega)$.

Exercice 6 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose que pour tout $v \in X = L^1(\Omega)$, on a $uv \in L^1(\Omega)$.

1. Soit $\phi : X \rightarrow X$ définie par $\phi(v) = uv$. Montrer que le graphe de ϕ est fermé dans $X \times X$.
2. En déduire que $u \in L^\infty(\Omega)$. (Indication : on appliquera le théorème du graphe fermé, puis on raisonnera par l'absurde.)