2024/2025
Analyse 6
L3
Le 23/05/2025

Examen Final - Correction

Exercice 1 :

1

1. $t \mapsto t(t^2+1)$ ne s'annule qu'en 0 qui est donc l'unique point singulier.

On résout (E) sur I_2 : $\forall t>0$, (E) $\Leftrightarrow$ $x' + \frac{1-t^2}{t(1+t^2)} x = \frac{-2\cancel{t}}{\cancel{t}(1+t^2)}$

On commence par résoudre (E_H) : $x' = \frac{t^2-1}{t(1+t^2)} x$, EDO linéaire homogène du 1er ordre. On a donc :

$$\exists \tilde{C} \in \mathbb{R}, \forall t \in I_2, \ x(t) = \tilde{C} \exp\left(-\int_1^t \frac{u^2-1}{u(u^2+1)} du\right)$$

$\frac{a}{u} + \frac{bu+c}{u^2+1}$

$= \frac{au^2+a+bu^2+cu}{u(u^2+1)} = \text{n2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=-b \\ c=0 \\ a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=+2 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases}$

On : $\int_1^t \frac{u^2-1}{u(u^2+1)} du = \int_1^t \frac{u^2+1}{u(u^2+1)} du - \int_1^t \frac{2}{u(u^2+1)} du = \int_1^t \frac{du}{u} - 2\int_1^t \frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1} du$

2

$$= -\int_1^t \frac{du}{u} + \int_1^t \frac{2u}{u^2+1}\,du = -\ln t + \left[\ln(1+u^2)\right]_1^t$$

$$= -\ln t + \ln(1+t^2) - \ln 2 = -\ln\left(\frac{t}{1+t^2}\right) - \ln 2$$

Donc : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \quad x(t) = C \exp\left(-\left(-\ln\left(\frac{t}{1+t^2}\right)\right)\right)$

le $-\ln 2$ passe dans la constante

soit encore : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t > 0, x(t) = \frac{Ct}{1+t^2}$.

Donc $\quad S_{H, I_2}(E) = \left\{ \begin{array}{l} I_2 \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{Ct}{1+t^2} \end{array} \middle| \, C \in \mathbb{R} \right\}$.

Sur I_1 on résout de même avec $t < 0$ et on obtient via $\ln|t| = \ln(-t)$:

$$S_{H, I_1}(E) = \left\{ \begin{array}{l} I_1 \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{Dt}{1+t^2} \end{array} \middle| \, D \in \mathbb{R} \right\}$$

③ Il reste à chercher une solution particulière sur I_2 et une autre sur I_1. Au vu du second membre on cherche cette solution sous la forme d'un polynôme du premier degré :

$\forall t>0 \quad x_p(t) = at+b$:

$\forall t>0,\ a\,t(t^2+1) - (at+b)(t^2-1) + 2t = 0$

$\Leftrightarrow \forall t>0\ \cancel{at^3} + at - \cancel{at^3} + at - bt^2 + b + 2t = 0$

$\Leftrightarrow \forall t>0,\ -bt^2 + 2(1+a)t + b = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=-1 \end{cases}$

Donc $t \mapsto -t$ est solution particulière de l'équation sur I_2 mais également sur I_1 et en fait sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. On vient de répondre à la question, $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto -t\end{array}$ convient.

21

<u>Exercice 2 :</u>

1. On a :
$$\chi_A = \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 4 \\ -1 & 3-x & -1 \\ -2 & -1 & -3-x \end{vmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 4 \\ -1 & 3-x & -1 \\ 0 & 2x-7 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1+x \\ -1 & 3-x & 0 \\ 0 & 2x-7 & -(1+x) \end{vmatrix} = (1+x) \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1 \\ -1 & 3-x & 0 \\ 0 & 2x-7 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+x) \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1 \\ -1 & 3-x & 0 \\ 3-x & 2x-5 & 0 \end{vmatrix} = (1+x) \begin{vmatrix} -1 & 3-x \\ 3-x & 2x-5 \end{vmatrix}$$

$$= (1+x)\left[-2x+5 - (3-x)^2\right] = (1+x)\left(-2x+5-9-x^2+6x\right)$$

$$= (1+x)(-x^2+4x-4) = -(1+x)(x-2)^2.$$

En particulier les valeurs propres de A sont -1 de multiplicité 1 et 2 de multiplicité 2.

5

2. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. $X\in N_{-1} \iff (A+I_3)X=0$

$$\iff \begin{cases} \cancel{1}^{2}x+\cancel{2}^{1}y+\cancel{1}^{2}z=0 \\ -x+4y-z=0 \\ -2x-y-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-4y+z=0 \\ 9y=0 \\ -9y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \iff X\in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de N_{-1}, qui est bien de dimension 1.

3. On calcule d'abord $(A-2I_3)^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 18 \end{pmatrix}$$

D'où $X \in N_2 \iff \begin{cases} -9x - 18z = 0 \\ 9x + 18z = 0 \end{cases} \iff x + 2z = 0$

N_2 est donc le plan $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

4. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right. ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right. ;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

Donc P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(7) Posons $D = P\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1}$ et $N = A - D$.

On a : $D = \begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&-2\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&2\\0&2&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&0&6\\0&2&0\\-3&0&-4\end{pmatrix}$

et $N = \begin{pmatrix}3&2&4\\-1&3&-1\\-2&-1&-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5&0&6\\0&2&0\\-3&0&-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&2&-2\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

On vérifie que $N^2 = \begin{pmatrix}-2&2&-2\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2&-2\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

donc N est nilpotente. De plus $ND = DN$.

8

D'où par unicité de la décomposition de Jordan-Dunford :

$$A = D + N \quad \text{avec } D = P\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} \text{ et } N = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme D et N commutent :

$$\exp(tA) = \exp(tD + tN) = \exp(tD)\exp(tN)$$

$$= P\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}P^{-1}\left(I_3 + tN + 0\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-2t & 2t & -2t \\ -t & 1+t & -t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{-t} & 0 & -2e^{-t} \\ e^{2t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-2t & 2t & -2t \\ -t & 1+t & -t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix}$$

(9)

$$= \begin{pmatrix} -e^{-t}+2e^{2t} & 0 & -2e^{-t}+2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ e^{-t}-e^{2t} & 0 & 2e^{-t}-e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2t & 2t & -2t \\ -t & 1+t & -t \\ t & -t & 1+t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{-t} + 2e^{2t} + \cancel{2te^{-t}} - \overset{2}{\cancel{1}}\cancel{t}e^{2t} - \cancel{2te^{-t}} + 2\cancel{t}e^{2t} & -\cancel{2te^{-t}} + \overset{2}{\cancel{1}}te^{2t} + \cancel{2te^{-t}} - \cancel{2te^{2t}} & 2te^{-t} - 4te^{2t} - 2e^{-t} + 2e^{2t} - 2te^{-t} + 2te^{2t} \\ -te^{2t} & (1+t)e^{2t} & -te^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} - \cancel{2te^{-t}} + \cancel{2}te^{2t} + \cancel{2te^{-t}} - \cancel{te^{2t}} & 2\cancel{te^{-t}} - \underset{1}{\cancel{2}}te^{2t} - 2\cancel{te^{-t}} + \cancel{te^{2t}} & -2\cancel{t}e^{-t} + \overset{1}{\cancel{2}}te^{2t} + 2e^{-t} - e^{2t} + 2\cancel{te^{-t}} - \cancel{te^{2t}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2te^{2t} - e^{-t} + 2e^{2t} & 2te^{2t} & -2te^{2t} - 2e^{-t} + 2e^{2t} \\ -te^{2t} & (t+1)e^{2t} & -te^{2t} \\ te^{2t} + e^{-t} - e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} + 2e^{-t} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

7. On a : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2te^{2t} - e^{-t} + 2e^{2t} \\ -te^{2t} \\ (t-1)e^{2t} + e^{-t} \end{pmatrix}$

8. Comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à la vp -1 dont la partie réelle est <0 on a : $X(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. On peut le retrouver par le calcul.

10

Exercice 3 :

1. (a) Si $b \leq 1$, b est fini.

Si $b > 1$ on a : $\forall t \geq 1,\ y'(t) \geq \frac{1}{2}((y(t))^2+1)$

D'où : $\forall t \geq 1,\ \dfrac{2y'(t)}{1+(y(t))^2} \geq 1$

On intègre sur $[1, b]$:

$$b-1 \leq \int_1^b \frac{2y'(t)}{1+(y(t))^2}\,dt = \Big[2\,\mathrm{Arctan}(y(t))\Big]_1^u = 2\,\mathrm{Arctan}(y(u)) - 2\,\mathrm{Arctan}(y(1))$$
$$\leq \pi - 2\,\mathrm{Arctan}(y(1)).$$

D'où $b \leq \pi + 1 - 2\,\mathrm{Arctan}(y(1)) < +\infty$

(b) Par le théorème de sortie de tout compact ; $|y(t)| \xrightarrow[t \to b^-]{} +\infty$.

2. (a) On a : $\forall x \geq 0,\ e^x \geq 1$. On intègre entre 0 et t :

$\forall t \geq 0,\ \int_0^t e^x\,dx \geq t \Rightarrow \forall t \geq 0,\ e^t \geq t+1 \geq t$

Puis on intègre encore : $\forall u \geq 0,\ e^u \geq \frac{u^2}{2}+1 \geq \frac{u^2}{2}$.

(b) Soit y solution de (E'). On a :

$$y' = \frac{1}{2}(y^2+t^2) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{y^2+t^2}\right)^2 < e^{\sqrt{y^2+t^2}}$$

Donc y est barrière inférieure stricte pour (E).

(c) On a alors que si x est solution de (E) et y est solution de (E'), avec pour $t_0 \in]a,b[$, $x(t_0)=y(t_0)$,

$\forall t \geq t_0,\quad x(t) > y(t)$. Or $|y(t)| \xrightarrow[t\to b^-]{} +\infty$

donc $y(t) \xrightarrow[t\to b^-]{} +\infty$ car y est positive dans un voisinage de b^- ($y' > 0$ et $|y(t)| \xrightarrow[t\to b^-]{} +\infty$). Donc $x(t) \xrightarrow[t\to b^-]{} +\infty$

(d) On a $x'(0) = e^{\sqrt{0^2+0^2}} = 1$. Puis en utilisant une solution de (E') qui vérifie $y(0) = 0$ on a :

$\forall t \in [0, b[\quad x(t) \geq y(t)$ et comme $y(t) \underset{t \to b^-}{\longrightarrow} +\infty$

on sait que b est estimé par la durée de vie de y. On en reportant de $\frac{2y'(t)}{1+y^2(t)} \geq 1$, $\forall t \in [1, b[$, on a : $b - 0 \leq \pi - \underbrace{\mathrm{Arctan}(y(0))}_{= 0} = \pi$

(en supposant $b \geq 1$).

Exercice 4 :

(1) Par la formule de Cauchy :

$$\int_C \left(2+z+\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}\,dz = 2\int_C \frac{f(z)}{z-0} + \int_C f(z)\,dz + \int_C \frac{f(z)}{(z-0)^2}\,dz$$

$$= 2i\pi\left(2f(0) + 0 + f'(0)\right).$$

(2) On : $\int_C \left(2+z+\frac{1}{z}\right)\frac{f(z)}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \left(2+e^{it}+e^{-it}\right)\frac{f(e^{it})}{\cancel{e^{it}}}\, i\cancel{e^{it}}\,dt$

$$= \int_0^{2\pi} (2+2\cos t) f(e^{it})\, i\,dt = 4i \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2)\, dt$$

D'où : $\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(t/2) = \frac{\pi}{2} (2f(0)+f'(0))$.

Exercice 5 :

(1) On a $K \cap \gamma^* = \emptyset$. De plus $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est C^0 sur $\Omega \setminus \gamma^*$ et elle est à valeurs entières. Comme K est connexe, $z \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, z)$ est constante sur K.

(2) On a : $\forall \gamma$ lacet tracé dans Ω,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{dz}{z-a} - \int_\gamma \frac{dz}{z-b} = \mathrm{Ind}(\gamma, a) - \mathrm{Ind}(\gamma, b) = 0.$$

Par Morera et son corollaire, f admet une primitive sur Ω.

(3) On dérive $\left(\frac{z-a}{z-b}\exp(-F(z))\right)' = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)'\exp(-F(z))$

$$- \frac{z-a}{z-b} f(z)\exp(-F(z))$$

$$= \left(\frac{z-a}{z-b}\right)' - \frac{z-a}{z-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) = \frac{(z-b)-(z-a)}{(z-b)^2} - \frac{1}{z-b} + \frac{z-a}{(z-b)^2}$$

$$= 0$$

Donc, comme Ω est convexe, cette fonction est constante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall z \in \Omega, \frac{z-a}{z-b}\exp(-F(z)) = \lambda.$$

On a $\lambda \neq 0$ car $z-a \neq 0$. Donc : $\exists \mu \in \mathbb{C}, \lambda = e^{\mu}$

Alors : $\frac{z-a}{z-b} = \exp(\mu + F(z))$ et $g : z \mapsto \mu + F(z)$ convient.

(4) On écrit : $\exp(g(z)) = \exp\left(n \frac{g(z)}{n}\right) = (h(z))^n$

avec $h : z \mapsto \exp\left(\frac{g(z)}{n}\right)$.

(5) On factorise P sous la forme : $P(z) = c^n (z-a_1)\cdots(z-a_n)$.

et on écrit :

$$\forall z \in \Omega, \quad P(z) = c^n \frac{z-a_1}{z-a_n} \times \cdots \times \frac{z-a_{n-1}}{z-a_n} (z-a_n)^n$$

Alors : $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe h_i holomorphe sur Ω telle que

$\forall z \in \Omega, (h_i(z))^n = \frac{z-a_i}{z-a_n}$. On pose alors pour $z \in \Omega$:

$$r(z) = c\, h_1(z) \cdots h_{n-1}(z)\, (z-a_n)$$

et r convient.

Exercice 6:

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a : $f(z) = \dfrac{u(z)}{v(z)}$ avec

$$u(z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{z^2+a^2} \text{ et } v(z) = \sin(\pi z).$$

De plus, $v(n) = 0$ et $v'(n) = \pi \cos(\pi n) = (-1)^n \pi \neq 0$ donc n est un pôle simple de $\frac{u}{v}$ et on a :

$$\mathrm{Res}(f, n) = \frac{u(n)}{v'(n)} = \frac{\pi \cancel{\cos(\pi n)}}{n^2+a^2} \Big/ \pi \cancel{\cos(\pi n)} = \frac{1}{n^2+a^2}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{Z}, \ \mathrm{Res}(f, n) = \dfrac{1}{n^2+a^2}$.

2. On pose $u(z) = \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ et $v(z) = z^2+a^2$ de noches

simples $\pm ia$. Là encore ia et $-ia$ sont des pôles simples de f et on a : $u(ia) = \dfrac{\pi \cos(i\pi a)}{\sin(i\pi a)} = \dfrac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{i \operatorname{sh}(a\pi)}$

et $v(ia) = 0$ et $v'(ia) = 2ia$.

D'où : $\operatorname{Res}(f, ia) = \dfrac{u(ia)}{v'(ia)} = \dfrac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{i \operatorname{sh}(a\pi) \times 2ia} = -\dfrac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{2a \operatorname{sh}(a\pi)}$

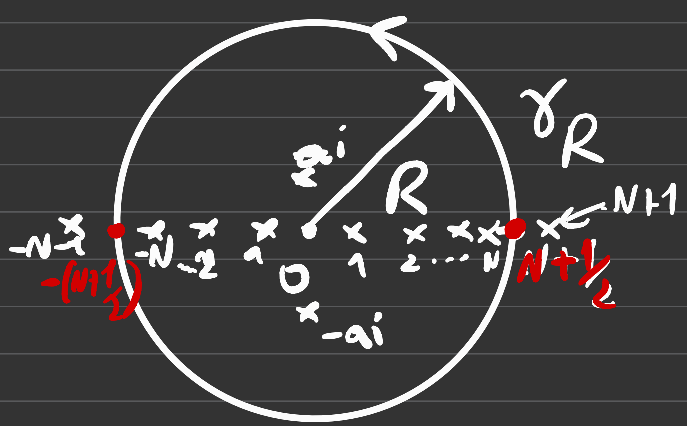
De même : $u(-ia) = \dfrac{\pi \cos(-i\pi a)}{\sin(-i\pi a)} = \dfrac{\pi\left(e^{+\pi a} + e^{-\pi a}\right)\frac{1}{2}}{\left(e^{+\pi a} - e^{-\pi a}\right)\frac{1}{2i}}$

$$= \frac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{-i \operatorname{sh}(a\pi)}$$

$v'(-ia) = -2ia$. D'où :

$$\operatorname{Res}(f, -ia) = \frac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{-i \operatorname{sh}(a\pi)} \times \frac{1}{-2ia} = -\frac{\pi \operatorname{ch}(a\pi)}{2a \operatorname{sh}(a\pi)}$$

3. Soit $N > |a|$ et $R = N + \frac{1}{2}$.



On applique la formule des résidus à f sur γ_R :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{Ind}(\gamma_R, n)\,\mathrm{Res}(f,n)$$
$$+ \mathrm{Ind}(\gamma_R; ia)\,\mathrm{Res}(f,ia) + \mathrm{Ind}(\gamma_R, -ia)\,\mathrm{Res}(f,-ia)$$

On : $\forall n \in \{-N, \dots, N\}$, $\mathrm{Ind}(\gamma_R, n) = 1$ et $\mathrm{Ind}(\gamma_R; \pm ia) = 1$

Donc avec les résultats des questions 1 et 2 :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{n^2+a^2} - 2\,\frac{\pi\,\mathrm{ch}(\pi a)}{2a\,\mathrm{sh}(\pi a)}$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$ i.e. $z \in \gamma_R^*$.

On a : $|z^2 + a^2| \geq |z|^2 - a^2 = R^2 - a^2$

D'où : $$|f(z)| \leq \frac{\pi}{R^2 - a^2} \sup_{|z|=R} \left| \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right|$$

et : $$\left| \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \right| \leq \int_{\gamma_R} |f(z)|\,dz \leq \sup_{|z|=R} |f(z)| \times \ell(\gamma_R)$$

$$\leq 2\pi R \, \frac{\pi}{R^2 - a^2} \sup_{|z|=R} \left| \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right|$$

$$= \frac{2\pi^2 R}{R^2 - a^2} \sup_{|z|=R} \left| \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right|$$

5. On a alors :

$$\frac{2\pi^2 R}{R^2-a^2} \sup_{|z|=R} \left| \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right| \leq C \frac{2\pi^2(N+\frac{1}{2})}{(N+\frac{1}{2})^2-a^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

D'où : $\left| \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \right| \xrightarrow[\substack{R\to+\infty \\ \shortparallel \\ N+\frac{1}{2}}]{} 0$

et en passant à la limite dans la formule obtenue à la question 3 :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi a)}{a \operatorname{sh}(\pi a)} + 0$$

D'où

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi a)}{a \operatorname{sh}(\pi a)}$$

6. On a :

$$\pi\, \mathrm{ch}(\pi a) = \pi\left(1+\frac{\pi^2 a^2}{2}+o(a^3)\right)$$

$$= \pi + \frac{\pi^3}{2} a^2 + o(a^3)$$

et $a\, \mathrm{sh}(\pi a) = a\left(\pi a + \frac{(\pi a)^3}{6} + o(a^4)\right)$

$$= \pi a^2 + \frac{\pi^3 a^4}{6} + o(a^5)$$

Il vient :

$$\frac{\pi\, \mathrm{ch}(\pi a)}{a\, \mathrm{sh}(\pi a)} = \frac{\pi + \frac{\pi^3}{2} a^2 + o(a^3)}{\pi a^2\left(1+\frac{\pi^2 a^2}{6}+o(a^3)\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi a^2}\left(\pi + \frac{\pi^3}{2} a^2 + o(a^3)\right)\left(1-\frac{\pi^2 a^2}{6}+o(a^3)\right)$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{\pi^2}{3} + o(1).$$

D'où : $\lim_{a \to 0^+} \left(\frac{\pi \operatorname{ch}(\pi a)}{a \operatorname{sh}(\pi a)} - \frac{1}{a^2} \right) = \pi^2/3$

Posons, pour $a \in \mathbb{R}$, $g(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$.

On a : $\forall a \neq 0$, $f(a) = \frac{1}{a^2} + 2g(a)$

D'où : $2g(a) = f(a) - \frac{1}{a^2} = \frac{\pi \operatorname{ch}(\pi a)}{a \operatorname{sh}(\pi a)} - \frac{1}{a^2}$.

Or la série $\sum \frac{1}{n^2+a^2}$ CVN sur $\mathbb{R}$ car : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1$,

$\left| \frac{1}{n^2+a^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

D'où par passage à la limite en $a \to 0^+$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{a \to 0^+} g(a) = \frac{1}{2} \lim_{a \to 0^+} \left(\frac{\pi \operatorname{ch}(\pi a)}{a \operatorname{sh}(\pi a)} - \frac{1}{a^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$