USPN, Institut Galilée
Licence 3
Analyse 6

Année universitaire 2024-2025

# Examen

**Le 23 mai 2025**

Durée : 3h.
Les documents, calculatrices, appareils électroniques et moyens de communication sont interdits.
Le sujet comporte deux pages recto-verso.

**Exercice 1.**

1. Déterminer, sur chacun des intervalles $I_1 = ]-\infty, 0[$ et $I_2 = ]0, +\infty[$ les solutions de l'équation différentielle : $(E) \quad t(t^2+1)x' - x(t^2-1) + 2t = 0$.
2. Existe-t-il des solutions de $(E)$ définies sur $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 2.** Dans cet exercice, $I_3$ désigne la matrice identité de taille 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer, sous forme factorisée, le polynôme caractéristique de $A$, puis ses valeurs propres ainsi que leurs multiplicités algébriques respectives.
2. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_{-1} = \mathrm{Ker}\,(A + I_3)$.
3. Déterminer une base du sous-espace caractéristique $N_2 = \mathrm{Ker}\,(A - 2I_3)^2$.
4. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $P$ est inversible et déterminer son inverse.
5. Déterminer la décomposition de Jordan-Dunford de la matrice $A$ en démontrant soigneusement votre résultat.
6. Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA)$.
7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant :
$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = 3x(t)+2y(t)+4z(t) \\ y'(t) = -x(t)+3y(t)-z(t) \\ z'(t) = -2x(t)-y(t)-3z(t) \end{cases}.$$
8. Déterminer la limite de $||X(t)||$, lorsque $t$ tend vers $+\infty$, où $X$ est l'unique solution du problème de Cauchy
$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X' = AX.$$

**Exercice 3.** On se propose d'étudier l'équation différentielle $(E) : x' = e^{\sqrt{x^2+t^2}}$.

1. On commence par considérer l'équation auxiliaire $(E') : y' = \frac{1}{2}(y^2 + t^2)$.
   (a) Si $(]a, b[, y)$ est une solution maximale de $(E')$, montrez que $b$ est fini. *Indication : On pourra supposer $b > 1$ (sinon $b \leq 1$ et $b$ est fini...) et constater que pour $t \geq 1$ on a $y' \geq \frac{1}{2}(y^2 + 1)$.*
   (b) Que peut-on dire que $|y(t)|$ lorsque $t$ tend vers $b^-$?
2. (a) Montrer que : $\forall u \geq 0, \ e^u > \frac{u^2}{2}$.
   (b) En déduire que les solutions de $(E')$ sont des barrières inférieures strictes pour $(E)$.
   (c) En déduire que les solutions de $(E)$ tendent vers l'infini en un temps fini.
   (d) Montrer que si $(]a, b[, x)$ est la solution maximale de $(E)$ vérifiant $x(0) = 0$ alors $b \leq \pi$.

**Exercice 4.** On note $C$ le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Soit $f$ une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ contenant le disque fermé $\overline{D}(0,1)$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_C \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z} \mathrm{d}z = 2i\pi(2f(0) + f'(0))$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{it}) \cos^2(\frac{t}{2}) \mathrm{d}t$.

**Exercice 5.** Soit $K$ un compact connexe de $\mathbb{C}$ tel que $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ est connexe. On fixe $a$ et $b$ deux points de $K$. Soit $\gamma$ un lacet dans $\Omega$.

1. Montrer que la fonction $c \mapsto \mathrm{Ind}(\gamma, c)$ est constante sur $K$.
2. En déduire que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \end{array}$ admet une primitive dans $\Omega$.
3. Soit $F$ une primitive de $f$ dans $\Omega$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que l'on ait :
$$\forall z \in \Omega,\ \frac{z-a}{z-b} \exp(-F(z)) = \lambda.$$
En déduire qu'il existe une fonction $g$ holomorphe sur $\Omega$ telle que :
$$\forall z \in \Omega,\ \frac{z-a}{z-b} = \exp(g(z)).$$
4. Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il existe une fonction $h$ holomorphe dans $\Omega$ telle que
$$\forall z \in \Omega,\ \frac{z-a}{z-b} = (h(z))^n.$$
5. * Soit $P$ un polynôme de degré $n \geq 2$, de racines distinctes ou confondues $a_1, \ldots, a_n$ appartenant toutes à $K$. Montrer qu'il existe une fonction $r$ holomorphe dans $\Omega$ telle que:
$$\forall z \in \Omega,\ P(z) = (r(z))^n.$$

**Exercice 6.** Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $f$ la fonction définie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \cup \{\pm ai\})$ par
$$f(z) = \frac{\pi \cos(\pi z)}{(z^2 + a^2)\sin(\pi z)}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Res}(f, n) = \frac{1}{n^2+a^2}$.
2. Montrer que $\mathrm{Res}(f, \pm ai) = -\frac{\pi \mathrm{ch}(\pi a)}{2a\mathrm{sh}(\pi a)}$.
3. Soit $N$ un entier strictement supérieur à $|a|$ et soit $R = N + \frac{1}{2}$. On note $\gamma_R$ le cercle de centre 0 et de rayon $R$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Montrer que :
$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi \mathrm{ch}(\pi a)}{a\mathrm{sh}(\pi a)} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z.$$
4. Démontrer que $\displaystyle\left| \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq \frac{2\pi^2 R}{R^2 - a^2} \sup_{|z|=R} \left| \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right|$.
5. On admet qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = N + \frac{1}{2}$, $\left|\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right| \leq C$. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$.
6. * Calculer la limite quand $a$ tend vers 0 de $\frac{\pi \mathrm{ch}(\pi a)}{a\mathrm{sh}(\pi a)} - \frac{1}{a^2}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.