

Feuille de TD 1 : Opérateurs bornés

Exercice 1

Soit $H = L^2(X, \mathbb{C})$ et soit $K \in L^2(X \times X, \mathbb{C})$. Soit T_K l'opérateur défini sur H par

$$\forall u \in H, \forall x \in X, T_K u(x) = \int_X K(x, y) u(y) dy.$$

1. Montrer que T_K est bien défini.
2. Montrer que $\|T_K\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \|K\|_{L^2(X \times X, \mathbb{C})}$.
3. Calculer l'adjoint de T_K .

Exercice 2

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint, alors $r(T) = \|T\|$ où $r(T)$ est le rayon spectral de T .

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert et soit U un opérateur unitaire sur H .

1. Montrer que $H = \text{Ker}(U - I) \oplus \overline{\text{Im}(U - I)}$.
2. Soit P le projecteur orthogonal d'image $\text{Ker}(U - I)$. Soit, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{I + U + \dots + U^n}{n + 1}.$$

Montrer que, pour tout $u \in H$, $S_n u \rightarrow Pu$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4 - Trace d'un opérateur positif

Soient H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H .

Soit T un opérateur positif sur H , i.e. T est borné, auto-adjoint et pour tout $u \in H$, $(Tu|u) \in \mathbb{R}_+$.

On admettra qu'il existe un unique opérateur positif S tel que $S^2 = T$. On le note $T^{\frac{1}{2}}$.

On pose

$$\text{tr } T = \sum_{n=1}^{\infty} (Te_n|e_n) \in [0, +\infty].$$

Le réel $\text{tr } T$ est appelé trace de l'opérateur T .

1. Montrer que la trace est indépendante du choix de la base hilbertienne de H .
2. Montrer que, pour tous opérateurs positifs T et S , $\text{tr}(T + S) = \text{tr } T + \text{tr } S$ et que, pour tout $\lambda \geq 0$, $\text{tr}(\lambda T) = \lambda \text{tr } T$.

3. Montrer que si T et S sont deux opérateurs positifs tels que $0 \leq T - S$, alors $\text{tr } S \leq \text{tr } T$.

4. Montrer que, pour tout opérateur unitaire U , $\text{tr}(UTU^{-1}) = \text{tr}(U^{-1}TU) = \text{tr } T$.

Exercice 5

Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer que $\sigma(M_\varphi) = \text{Im ess } \varphi$ où M_φ est l'opérateur de multiplication par φ sur $L^2(\mathbb{R})$ et

$$\text{Im ess } \varphi = \{\lambda \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \text{Leb}(\varphi^{-1}(D(\lambda, \varepsilon))) > 0\}.$$

En déduire que si $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $\sigma(M_\varphi) = \varphi([a, b])$.

Exercice 6

Soit E l'espace $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ des suites bornées $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes, muni de la norme:

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|.$$

Soit T l'opérateur sur E défini par :

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{Z}, (Tu)_n = u_{n+1}.$$

1. Calculer la norme de T .
2. Montrer que tout nombre complexe de module 1 est valeur propre de T .
3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$. Soit $u \in E$. On note $(T - \lambda)u = f$. Pour tout entier $p \geq 1$, exprimer u_n en fonction de $f_{n-1}, \dots, f_{n-p}$ et de u_{n-p} . Que devient cette expression lorsque p tend vers $+\infty$? En déduire que λ n'appartient pas au spectre de T .
4. En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer le spectre de T .

On considère le sous-espace fermé F de E constitué des suites u telles que $u_n = 0$ pour tout $n > 0$. Alors, $T(F) \subset F$ et on désigne par T_F l'opérateur induit par T sur F .

5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$ et $\lambda \neq 0$. En utilisant l'expression de $(T - \lambda)^{-1}$ trouvée à la question 3, montrer que λ appartient au spectre de T_F .
6. En utilisant les résultats des questions 1 et 5, déterminer le spectre de T_F . Comparer avec le résultat obtenu à la question 4.

Exercice 7

On désigne par E l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs complexes, muni de la norme infinie $\| \cdot \|_\infty$.

On note T_0 l'opérateur défini sur E par :

$$\forall u \in E, \forall x \in [0, 1], T_0 u(x) = xu(x).$$

Soit $f \in E$. On définit l'opérateur L par :

$$\forall u \in E, Lu = \int_0^1 f(x)u(x)dx.$$

Enfin si $g \in E$ on considère l'opérateur T défini par :

$$\forall u \in E, Tu = T_0 u + (Lu)g.$$

1. Soit $\lambda \in [0, 1]$. Montrez que si $g(\lambda) = 0$, alors $T - \lambda$ n'est pas surjectif. Dans le cas où $g(\lambda) \neq 0$, montrez que la fonction $h : x \mapsto \sqrt{|x - \lambda|}$ n'est pas dans l'image de $T - \lambda$.

En déduire que le spectre $\sigma(T)$ de T contient $[0, 1]$.

2. Démontrez que $\sigma(T) \setminus [0, 1]$ est constitué de valeurs propres dont les sous-espaces propres sont de dimension 1. Caractérisez ces valeurs propres comme l'ensemble des solutions d'une équation $F(\lambda) = 0$ où F est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ que l'on exprimera à l'aide de f et de g . En déduire que $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ est discret.

3. On suppose que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = 1$ et $g(x) = \alpha$, α étant un réel non nul. Déterminez $\sigma(T)$.

Exercice 8

Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On note $\sigma(A)$ son spectre.

1. On suppose $A \geq 0$ au sens où :

$$\forall \phi \in \mathcal{H}, (\phi, A\phi) \geq 0$$

a. Soit $x < 0$. Etablir que :

$$\forall \phi \in \mathcal{H}, \|(A - x)\phi\|^2 \geq x^2 \|\phi\|^2$$

En déduire que $A - x : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est injective.

b. Montrer que son image est dense. Pour cela on calculera l'orthogonal de $\text{Im } A$.

c. En déduire que l'application $A - x$ est surjective donc bijective.

On note $R_A(x) = (A - x)^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ son application inverse.

d. Majorer $\|R_A(x)\|$.

e. Etablir l'implication $A \geq 0 \Rightarrow \sigma(A) \subset [0, +\infty)$.

2. Montrer l'implication réciproque à l'aide du théorème spectral.

Exercice 9

Version discrète du lemme de Schnoll.

Soit $\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace de Hilbert des suites $\phi = (\phi_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes de carré sommable. On considère dans $\ell^2(\mathbb{N})$ l'opérateur de multiplication V par une suite réelle $v = (v_n)_{n \geq 0}$ et l'opérateur de Schrödinger $H = H_0 + V$ défini par :

$$(H\phi)_n = \begin{cases} -\phi_{n+1} - \phi_{n-1} + v_n \phi_n & \text{si } n \geq 1 \\ -\phi_1 + v_0 \phi_0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Soit $G(z) = (H - z)^{-1}$ la résolvante de H en $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et soit, pour $m, n \in \mathbb{N}$:

$$G_{m,n} = (\delta_m | G(z) \delta_n)$$

où $\delta_m = (\delta_{m,k})_{k \geq 0}$ avec $\delta_{m,k} = 1$ si $k = m$ et $\delta_{m,k} = 0$ si $k \neq m$. Dans toute la suite on suppose que la suite v est bornée.

1. Montrer que H est auto-adjoint borné.

2. Etablir l'estimation suivante de la norme de la résolvante :

$$\|G(z)\| \leq \frac{1}{|\text{Im} z|} \quad (1)$$

3. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $\psi(\lambda) = (\psi_n(\lambda))$ la solution de $H\psi = \lambda\psi$, $\psi_0 = 1$. On note $E(\lambda)$ la famille spectrale associée à H . On note $d\rho(\lambda)$ la mesure spectrale de H définie par :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, (\delta_m | E(\lambda) \delta_n) = \psi_m(\lambda) \psi_n(\lambda) d\rho(\lambda)$$

Exprimer alors $G_{m,n}(z)$ sous la forme d'une intégrale du type $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\rho(\lambda)$.

4. Etablir que :

$$\text{Im } G_{n,n}(i) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi_n^2(\lambda)}{\lambda^2 + 1} d\rho(\lambda) \leq 1 \quad (2)$$

5. Soit $\varepsilon > 0$ et soit :

$$\theta(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi_n^2(\lambda)}{(\lambda^2 + 1)(1 + n^{\frac{1}{2} + \varepsilon})^2}$$

Etablir que : $\theta(\lambda) < +\infty$ pour ρ -presque tout λ .

Indication : Estimer $\int_{\mathbb{R}} \theta(\lambda) d\rho(\lambda)$ grâce à (2).

6. Conclure : Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe pour ρ -presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante $C_{\lambda, \varepsilon}$ telle que pour tout $n \geq 0$:

$$|\psi_n(\lambda)| \leq C_{\lambda, \varepsilon} (1 + n)^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$$

Ainsi chaque fonction propre généralisée $\psi(\lambda)$ est polynomialement bornée en n pour ρ -presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$.