Institut Galilée **2024-2025**
Filière M1
Analyse fonctionnelle - Option "Fondamentale"

Feuille de TD 2 : Opérateurs compacts

Exercice 1

Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On considère l'opérateur $T : C([a,b],\mathbb{C}) \to C([a,b],\mathbb{C})$ défini par : $\forall u \in C([a,b],\mathbb{C})$,

$$\forall x \in [a,b],\ Tu(x) = \int_a^x K(x,y)u(y)\mathrm{d}y.$$

1. Montrer que T est compact.
2. Montrer que $\sigma(T) = \{0\}$.

Exercice 2

Vérifier que l'opérateur de multiplication T, défini sur $L^2([0,2],\mathbb{C})$ par

$$\forall u \in L^2([0,2],\mathbb{C}), \forall x \in [0,2], (T(u))(x) = xu(x),$$

n'est pas compact, mais qu'il est borné et auto-adjoint.

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert. Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls tendant vers 0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n un projecteur orthogonal de rang fini avec $P_m P_n = 0$ si $m \neq n$.
1. Montrer que $\sum \lambda_n P_n$ converge pour la norme d'opérateur vers un opérateur $T \in \mathcal{B}_\infty(H)$.
2. Si de plus les λ_n sont réels, montrer que T est auto-adjoint.

Exercice 4

Soient $(E, ||\ ||)$ une espace de Banach, $x_0 \in E$ et f une forme linéaire sur E telle que $f(x_0) \neq 0$. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall x \in E,\ Tx = f(x)x_0.$$

1. Montrer que T est un projecteur si et seulement si $f(x_0) = 1$.
2. Déterminer $\sigma(T)$.
3. Expliciter la résolvante de T.

Exercice 5 - Opérateurs de Hilbert-Schmidt

Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur T sur H est dit de Hilbert-Schmidt lorsqu'il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H, on a

$$\forall N \geq 0,\ \sum_{n=0}^{N} ||Te_n||^2 \leq M.$$

On note $\|T\|_{HS}$ le plus petit M vérifiant cette inégalité. Soit $\mathcal{B}_2(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt.
1. Montrer que $T \in \mathcal{B}_2(H)$ si et seulement si $\mathrm{tr}\,(T^*T) < \infty$.
2. Soient $T \in \mathcal{B}_2(H)$, $\varepsilon > 0$ et $\{e_0, \ldots, e_N\}$ une famille orthonormée de H tel que

$$\sum_{n=0}^{N} \|Te_n\|^2 \geq \|T\|_{HS} - \varepsilon^2.$$

Si P_N désigne le projecteur orthogonal sur $V = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_N)$, montrer que $\|T - TP_N\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \varepsilon$.
3. En déduire que T est compact.
4. Si $H = L^2(X,\mathbb{C})$, soit $K \in L^2(X \times X,\mathbb{C})$. Montrer que l'opérateur T_K défini sur H par

$$\forall u \in H,\ \forall x \in X,\ T_K u(x) = \int_X K(x,y)u(y)dy$$

est de Hilbert-Schmidt.

Remarque : On peut montrer que réciproquement, si $T : H \to H$ est dans $\mathcal{B}_2(H)$, il existe $K \in L^2(X \times X,\mathbb{C})$ tel que $T = T_K$.

Exercice 6 - Théorème de Mercer

Soit K une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$ à valeurs complexes. On désigne par T_K l'élément de $\mathcal{L}(L^2([0,1],dx))$ défini par : $\forall f \in L^2([0,1])$,

$$\forall x \in [0,1],\ T_K f(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

On suppose que l'opérateur T_K est autoadjoint et positif *i.e* $(T_K f|f) \geq 0$ pour tout $f \in L^2([0,1])$.
1. Montrer que pour tout intervalle I contenu dans $[0,1]$, on a

$$\int_I \int_I K(x,y)dxdy \in \mathbb{R}_+.$$

En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$, $K(x,x) \in \mathbb{R}_+$.
2. Soit (λ_n) la suite des valeurs propres non nulles de T_K répétées selon leur multiplicité et soit (φ_n) une base hilbertienne de l'orthogonal de $\ker(T_K)$ vérifiant pour tout n :

$$T_K \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$$

On a donc pour tout $f \in L^2([0,1])$ l'identité

$$T_K f = \sum_n \lambda_n (f|\varphi_n)\varphi_n$$

la convergence de la série ayant lieu dans $L^2([0,1])$.
a. Vérifier que chaque φ_n est continue.
b. En appliquant la question 1 à un noyau K_N convenable, montrer que pour tout N et tout $x \in [0,1]$,

$$K(x,x) \geq \sum_{n \leq N} \lambda_n |\varphi_n(x)|^2$$

3. a. Montrer que la série de terme général λ_n converge.
b. Montrer que la série de terme général $\lambda_n(f|\varphi_n)\varphi_n$ converge uniformément pour $x \in [0,1]$. Quelle est sa somme ?
c. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, la série de terme général $\lambda_n \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}$ converge uniformément en $y \in [0,1]$. Quelle est sa somme ?
d. Exprimer la somme des λ_n en fonction de K.

Exercice 7

On considère l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire

$$\forall f,g \in H,\ (f|g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

et de la norme associée notée $||\cdot||_2$. On désigne par T l'opérateur de H dans H défini par :

$$\forall f \in H,\ \forall x \in [0,1],\ (Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t)f(t)\mathrm{d}t$$

où le noyau K est défini par :

$$K(x,t) = \begin{cases} x(1-t) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq t \leq 1 \\ t(1-x) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que T est un opérateur borné.
2. Démontrer que T est auto-adjoint.
3. Montrer que l'image de T, $\mathrm{Im}(T)$, est incluse dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$.
4. Démontrer que T est un opérateur compact.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un complexe non nul. Montrer que l'équation en $f \in H$, $Tf = \lambda f$ est équivalente à

$$\begin{cases} f'' + \frac{1}{\lambda} f = 0 \\ f(0) = f(1) = 0. \end{cases}$$

6. Montrer que l'ensemble des valeurs propres non nulles de T est :

$$\{(n\pi)^{-2}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

7. En déduire le spectre de T.
8.a. Montrer que la norme de T est égale à son rayon spectral.
b. En déduire la norme de T.

Rappel : un opérateur A sur un espace de Hilbert $(H,(\cdot|\cdot))$ est dit positif lorsqu'il est auto-adjoint et

$$\forall u \in H,\ (Au|u) \geq 0.$$

9.a. Soit P un projecteur orthogonal dans H. Montrer que P est positif.
b. Montrer que T est un opérateur positif.
10. En utilisant le théorème de Mercer, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$