2025-2026
L3 - Analyse 6

Examen du 7 mai 2026 – Correction

Exercice 1 :

1. A est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale : 2 de multiplicité 2 et -3 de multiplicité 1.

2. On a pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $(A+3I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - z = 0 \\ 5y + z = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(-y+z) = \frac{1}{5}(-y-5y) = -\frac{6}{5}y \\ z = -5y \end{cases}$$

D'où $N_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 6/5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

3. On a : $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

et $(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$

D'où $(A-2I_3)^2 X = 0 \iff \begin{cases} 6z = 0 \\ -5z = 0 \\ 25z = 0 \end{cases} \iff z = 0.$

D'où $N_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

4. Par la méthode du pivot de Gauss, rang $P = 3$ donc P est inversible et :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{5} L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{6}{5} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{6}{25} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = P^{-1}$$

5. On pose $D = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1}$ et $N = A - D$

D est diagonalisable et on a :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{6}{25} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{12}{25} \\ 0 & 2 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

et $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc N est nilpotente.

Enfin : $ND = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$$

Par unicité de la décomposition, $A = D+N$ est la décomposition de Dunford de A.

6. On en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} = e^{t(D+N)} = e^{tD}e^{tN} = P\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}P^{-1}(I_3+tN)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{6}{25} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & \frac{6}{5}e^{-3t} \\ 0 & e^{2t} & -e^{-3t} \\ 0 & 0 & 5e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t}{5}-\frac{6}{25} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & \frac{6}{5}e^{-3t} \\ 0 & e^{2t} & -e^{-3t} \\ 0 & 0 & 5e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t}{5}-\frac{6}{25} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \left(\frac{t}{5}-\frac{6}{25}\right)e^{2t} + \frac{6}{25}e^{-3t} \\ 0 & te^{2t} & \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

7. L'unique solution de ce problème de Cauchy est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{tA}X_0 = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \left(\frac{t}{5}-\frac{6}{25}\right)e^{2t} + \frac{6}{25}e^{-3t} \\ 0 & te^{2t} & \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{25}e^{2t} + \frac{t}{5}e^{2t} + \frac{6}{25}e^{-3t} \\ \frac{1}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{pmatrix}$$

8. Ici $X(0) \in E_{-3}$ et -3 est une valeur propre de partie réelle strictement négative donc : $\|X(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Exercice 2 :

1. (E) s'écrit sous la forme $X' = f(t, X)$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $f\left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x y^2 \\ -y x^2 \end{pmatrix}$ dont les coordonnées sont polynomiales donc C^1. Donc f est localement lipschitzienne / à sa deuxième variable. Donc le théorème de Cauchy-Lipschitz local et conduit à l'existence et l'unicité d'une solution maximale au problème de Cauchy.

2. (a) On a : $\forall t \in I$, $E(x(t), y(t)) = x^2(t) + y^2(t)$

D'où :

$$\forall t \in I, \ \frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = 2x'(t)\, x(t) + 2y'(t)\, y(t)$$
$$= 2\, x(t)\, y^2(t)\, x(t) - 2\, y(t) x^2(t)\, y(t) = 0$$

(b) On en déduit que : $\forall t \in I, \forall t_0 \in I$, $x^2(t) + y^2(t) = x^2(t_0) + y^2(t_0)$

i.e. $\|X(t)\|^2 = \|X(t_0)\|^2 = \text{Cte}$.

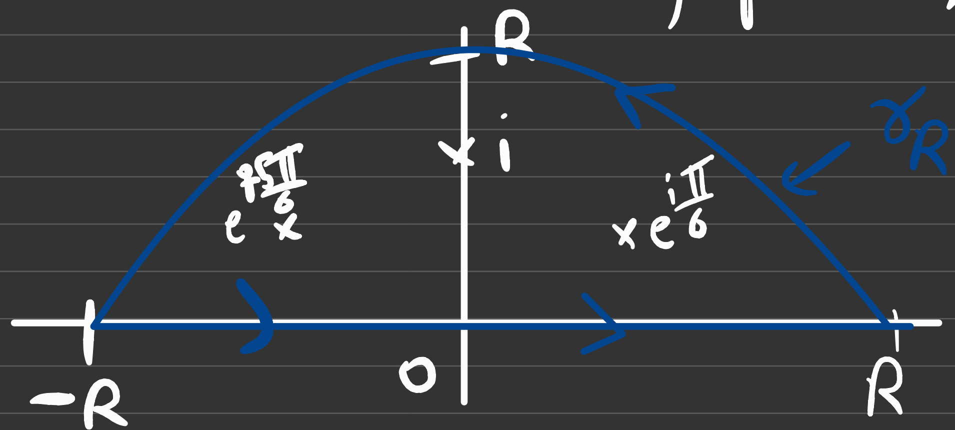
Donc X est bornée sur I. Si $\sup I < +\infty$ alors on devrait avoir $\|X(t)\| \xrightarrow[t\to(\sup I)^-]{} +\infty$ par le théorème de sortie de tout compact. Donc $\sup I = +\infty$. De même $\inf I = -\infty$ et $I = \mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Tout d'abord, les zéros complexes de z^6+1 sont : $\{e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{2}}, e^{\frac{i5\pi}{6}}, e^{\frac{-i\pi}{6}}, e^{\frac{-i\pi}{2}}, e^{-\frac{i5\pi}{6}}\}$.

On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{e^{\frac{i\pi}{6}}, i, e^{\frac{i5\pi}{6}}, e^{-\frac{i\pi}{6}}, -i, e^{-\frac{i5\pi}{6}}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z^4+1}{z^6+1} \end{array}$. Alors f est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{\underbrace{e^{\frac{i\pi}{6}}}_{z_1}, \underbrace{i}_{z_2}, \underbrace{e^{\frac{i5\pi}{6}}}_{z_3}, \underbrace{e^{-\frac{i\pi}{6}}}_{z_4}, \underbrace{-i}_{z_5}, \underbrace{e^{-\frac{i5\pi}{6}}}_{z_6}\}$ et ces points sont des pôles simples de f.

On considère le circuit, pour $R > 1$:



Par la formule des résidus :

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{3} \mathrm{Res}(f, z_j)\, \underbrace{\mathrm{Ind}(\gamma_R \oplus [-R,R]\,;\, z_j)}_{=1}$$

$$= 2i\pi \sum_{j=1}^{3} \mathrm{Res}(f, z_j)$$

On : $\displaystyle\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$.

Puis : $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\, d\theta$

$$= \int_0^{\pi} \frac{R^4 e^{i4\theta}+1}{R^6 e^{i6\theta}+1}\, iRe^{i\theta}\, d\theta$$

D'où : $\displaystyle\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq R\pi \times Cte\, \frac{R^4}{R^6} = O\left(\frac{1}{R}\right) \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

Donc $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = 2i\pi \sum_{j=1}^{3} \operatorname{Res}(f, z_j)$

Or, comme z_j est un pôle simple de f :

$$\operatorname{Res}(f, z_j) = \frac{z_j^4+1}{\frac{d}{dz}(z^6+1)\big|_{z=z_j}} = \frac{z_j^4+1}{6z_j^5} = \frac{1}{6}(-z_j)(z_j^4+1) = \frac{1}{6}(-z_j^5 - z_j)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{-z_j^{-5}} - z_j\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{z_j} - z_j\right)$$

Pour $z_1 = e^{\frac{i\pi}{6}}$ cela donne : $\frac{1}{6}\left(e^{-\frac{i\pi}{6}} - e^{\frac{i\pi}{6}}\right) = -\frac{1}{6} \times 2i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$= -\frac{1}{3} i \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} i$$

De même pour $z_2 = e^{\frac{i\pi}{2}}$: $\frac{1}{6}\left(e^{-\frac{i\pi}{2}} - e^{\frac{i\pi}{2}}\right) = -\frac{i}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{i}{3}$

Enfin pour $z_3 = e^{\frac{i5\pi}{6}}$: $\frac{1}{6}\left(e^{-\frac{5\pi}{6}} - e^{\frac{i5\pi}{6}}\right) = -\frac{i}{3}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{i}{6}$

Finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = 2i\pi\left(-\frac{i}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{4\pi}{3}$$

Exercice 4 :

1. (a) C'est exactement la définition de la multiplicité d'un pôle si $a \in P$ et de l'ordre d'un zéro si $a \in Z$, car F est non identiquement nulle. (cf sa série de Laurent en a)

En effet, si on écrit sa série de Laurent en a :

$$F(z) = \frac{a_{-m(a)}}{(z-a)^{-m(a)}} + \dots + a_0 + a_1(z-a) + \dots$$

$$= \frac{1}{(z-a)^{-m(a)}} \Big(\underbrace{a_{-m(a)} + a_{-m(a)+1}(z-a) + \dots}_{F_1(z)} \Big)$$

(b) On a : $\forall z \in V$, $F'(z) = m(a)(z-a)^{m(a)-1} F_1(z) + (z-a)^{m(a)} F_1'(z)$

D'où : $\forall z \in V$, $\dfrac{F'(z)}{F(z)} = \dfrac{m(a)}{z-a} + \dfrac{F_1'(z)}{F_1(z)}$

(c) Comme F_1 ne s'annule pas sur V, $\frac{F_1'}{F_1}$ est holomorphe sur V.

D'où, par 1 (b) : $\mathrm{Res}\left(\frac{F'}{F}, a\right) = m(a)$

2. On applique la formule des résidus à γ_R et $\frac{F'}{F}$:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R} \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = \sum_{a \in Z \cup P} \mathrm{Res}\left(\frac{F'}{F}, a\right) \underbrace{\mathrm{Ind}(\gamma_R, a)}_{=1 \text{ pour } R \text{ assez grand}}$$

par 1 (c) →

$$= \sum_{j=1}^{M} m(z_j) + \sum_{i=1}^{N} \underbrace{m(p_i)}_{<0}$$

$$= \sum_{j=1}^{M} m(z_j) - \sum_{i=1}^{N} |m(p_i)|$$

3. (a). On a : $\forall z \in C(c,R)$, $|g(z)| > |f(z) - g(z)| \geq 0$.

Donc g ne s'annule pas sur $C(c,R)$.

(b) On a : $\forall z \in C(c,R),\ |f(z)-g(z)| < |g(z)|$

On divise par $|g(z)| \neq 0$:

$$\forall z \in C(c,R),\ \left|\frac{f(z)}{g(z)} - 1\right| < 1 \quad \text{i.e. } F(z) \in D(1,1).$$

(c) On a : $$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{d\xi}{\xi} = \int_0^{2\pi} \frac{(F\circ\gamma)'(t)}{F(\gamma(t))}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{F'(\gamma(t))}{F(\gamma(t))}\gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz$$

(d) Par 3(b), $\tilde{\gamma}$ est un lacet dans $D(1,1)$. Or, la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{\xi}$ admet une $\mathbb{C}$-primitive dans $D(1,1)$ qui est étoilé et ne contient pas 0, donc $\int_{\tilde{\gamma}} \frac{d\xi}{\xi} = 0$

(e) On en déduit que : $\sum_{j=1}^{M} m(z_j) = \sum_{i=1}^{N} |m(p_i)|$ par 3(d) et 2. par $F = \frac{f}{g}$

Or les z_j sont les zéros de f et les p_i sont ceux de g.

4. (a) On a : $\dfrac{|a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_0|}{|z^n|} = O\left(\dfrac{1}{|z|}\right) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$

En particulier, il existe $R>0$ tel que :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ |z|>R,\ \frac{|a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_0|}{|z^n|}<1$$

(b) On applique 3(a) avec $f=Q$ et $g : z\mapsto z^n$.
Alors dans $D(0,R)$, Q a autant de zéros que g comptés avec leurs multiplicités. Or, g a comme unique zéro dans $D(0,R)$, 0 de multiplicité n !