

## Examen Le 7 mai 2026

Durée : 2h.

Les documents, appareils électroniques de tous types et moyens de communication sont interdits.  
Le sujet comporte deux pages recto-verso.

**Exercice 1.** Dans cet exercice,  $I_3$  désigne la matrice identité de taille 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de  $A$  ainsi que leurs multiplicités algébriques respectives.
2. Déterminer une base du sous-espace caractéristique  $N_{-3} = \text{Ker}(A + 3I_3)$ .
3. Déterminer une base du sous-espace caractéristique  $N_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)^2$ .
4. Soit la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $P$  est inversible et déterminer son inverse.
5. Déterminer la décomposition de Jordan-Dunford de la matrice  $A$  en démontrant soigneusement votre résultat.
6. Calculer, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(tA)$ .
7. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = -3z(t) \end{cases}.$$

8. Soit  $\|\cdot\|$  une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $X$  l'unique solution du problème de Cauchy

$$X(0) = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X' = AX.$$

Déterminer la limite de  $\|X(t)\|$ , lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 2.** On se propose d'étudier le système différentiel  $(E) : \begin{cases} x' = xy^2 \\ y' = -yx^2 \end{cases}$ .

1. Montrer que, pour tout  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ , le problème de Cauchy donné par  $(E)$  et  $\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  admet une unique solution maximale.

2. Soit  $E : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & u^2 + v^2 \end{matrix}$ .

(a) Soit  $(I, (x, y))$  une solution maximale de  $(E)$ . Montrer que :

$$\forall t \in I, \frac{d}{dt}[E(x(t), y(t))] = 0.$$

(b) En déduire que  $X = (x, y)$  est bornée sur  $I$  et que  $I = \mathbb{R}$ .

**Exercice 3.** Calculer, par la méthode des résidus, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$$

Vous expliquerez en détails toutes les étapes de votre calcul.

*Indication : pour simplifier les calculs des différents résidus, on pourra remarquer que si  $z \in \mathbb{C}$  vérifie  $z^6 + 1 = 0$ , alors  $z^{-5} = -z$ .*

**Exercice 4.** Soit  $D$  un disque ouvert non vide de  $\mathbb{C}$  et soit  $P := \{p_1, \dots, p_N\} \subset D$  un ensemble fini. Soit  $F$  holomorphe sur  $D \setminus P$  et non identiquement nulle. On suppose que chaque  $p_i \in P$  est un pôle de  $F$  de multiplicité  $m(p_i) < 0$ .

On note également  $Z := \{z_1, \dots, z_M\}$  l'ensemble des zéros de  $F$  dans  $D$  et pour chaque  $z_j \in Z$  on note  $m(z_j) > 0$  son ordre.

Enfin, si  $D$  est le disque de centre  $c \in \mathbb{C}$  et de rayon  $R > 0$ , on note  $\gamma_R$  le lacet :

$$\gamma_R : \begin{array}{ll} [0, 2\pi] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto c + Re^{it} \end{array}$$

1. (a) Montrer que, pour tout  $a \in P \cup Z$ , il existe  $F_1$  holomorphe sur un voisinage  $V$  de  $a$  telle que

$$\forall z \in V, F(z) = (z - a)^{m(a)} F_1(z) \quad \text{et} \quad F_1(z) \neq 0.$$

- (b) Montrer que :

$$\forall z \in V, \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{m(a)}{z - a} + \frac{F_1'(z)}{F_1(z)}$$

- (c) En déduire que :  $\forall a \in P \cup Z, \text{Res}\left(\frac{F'}{F}, a\right) = m(a)$

2. Montrer que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \sum_{j=1}^M m(z_j) - \sum_{i=1}^N |m(p_i)|.$$

3. Soient  $f$  et  $g$  holomorphes sur  $D = D(c, R)$ , continues sur  $\bar{D}$  et ayant au plus un nombre fini de zéros dans  $D$  comptés avec leurs multiplicités. Supposons que :

$$\forall z \in C(c, R), f(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad |f(z) - g(z)| < |g(z)|.$$

- (a) Justifier que  $g$  ne s'annule pas sur  $C(c, R)$ .  
 (b) Soit  $F = \frac{f}{g}$ . Montrer que :  $\forall z \in C(c, R), F(z) \in D(1, 1)$ .  
 (c) Posons, pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $\tilde{\gamma}_R(t) = (F \circ \gamma_R)(t)$ . Vérifier que :

$$\int_{\gamma_R} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{1}{\xi} d\xi.$$

- (d) Montrer que  $\int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{1}{\xi} d\xi = 0$ .  
 (e) Montrer que  $f$  et  $g$  ont le même nombre de zéros dans  $D$ , comptés avec leurs multiplicités.

4. Application : soient  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$  et  $Q : \begin{array}{ll} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 \end{array}$ .

- (a) Montrer qu'il existe  $R > 0$  tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R, |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0| < |z^n|.$$

- (b) En déduire que  $Q$  possède exactement  $n$  zéros complexes comptés avec leurs multiplicités.