Institut Galilée **2025-2026**
Filière M1
Analyse fonctionnelle - Option "Fondamentale"

Feuille de TD 1 : Dualité - Convergence faible

Exercice 1

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert.
1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H et soit $x \in H$. Montrer que $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si

$$\forall y \in H,\ \langle x_n, y\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle x, y\rangle.$$

2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Montrer que $x_n \rightharpoonup 0$.

Exercice 2

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H et soit $x \in H$.
On suppose que $x_n \rightharpoonup x$ et $||x_n|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} ||x||$. Montrer que l'on a alors $x_n \to x$.

Exercice 3

Soit $(H, \langle \cdot|\cdot \rangle)$ un espace de Hilbert complexe. On note $||\cdot||$ la norme sur H associée au produit scalaire.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite normée de H, *i.e.*, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||x_n|| = 1$. Justifier que l'on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite faiblement convergente dans H.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite normée de H qui converge faiblement vers $x \in H$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} ||x_n - x||^2 = 1 - ||x||^2.$$

3. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur borné sur H tel qu'aucun vecteur normé $x \in H$ ne vérifie $||T||_{\mathcal{L}(H)} = ||Tx||$ (cela signifie que la norme de T n'est pas atteinte).
a. Montrer qu'il existe une suite normée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faiblement convergente et telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} ||Tx_n|| = ||T||_{\mathcal{L}(H)}.$$

b. Montrer que cette suite normée converge faiblement vers le vecteur nul de H.

Exercice 4

On considère l'espace de Banach $(C([0,1]), ||\ ||_\infty)$. On note $E = C([0,1])$. Soit $u \in E'$ définie par

$$\forall f \in E,\ u(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

et pour tout $n \geq 1$, définissons $u_n \in E'$ par

$$\forall f \in E,\ u_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n}).$$

1. Calculer $||u||_{E'}$ et pour tout $n \geq 1$, $||u_n||_{E'}$.
2. Montrer que

$$\forall f \in E,\ u_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(f),$$

mais que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||u_n - u||_{E'} = 2$.

Exercice 5

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles que l'on munit de la norme infinie : $\forall f \in E,\ ||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

On rappelle le théorème de Riesz qui affirme que l'ensemble des formes linéaires continues *positives* s'identifie à l'ensemble des mesures de Borel positives μ sur $[0,1]$. Plus précisément, on pose:

$$\forall f \in E,\ \mu(f) = \int_0^1 f\mathrm{d}\mu.$$

Soit $(f_n)_{n\geq1}$ la suite de fonctions définies par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

1. Montrer que pour toute mesure de Borel μ sur $[0,1]$, $(\mu(f_n))_{n\geq1}$ est une suite convergente.
2. Montrer que $(f_n)_{n\geq1}$ n'est pas faiblement convergente dans E.
Indication : on pourra considérer les formes linéaires continues de Dirac : pour tout $t \in [0,1]$,

$$\delta_t\ :\ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(t) \end{array}.$$

On dit que E n'est pas *faiblement séquentiellement complet.*

Exercice 6 - Hahn-Banach géométrique

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $C \subset E$ un sous-ensemble convexe d'intérieur non vide de E. Nous noterons $Int(C)$ l'intérieur de C.
Le but de l'exercice est de montrer que :

> si $x \notin Int(C)$, il existe une forme linéaire non nulle $\ell : E \to \mathbb{R}$ et un réel α tels que $\ell(x) = \alpha$ et $\ell(y) < \alpha$ pour tout $y \in Int(C)$.

Remarquons que la forme linéaire comme le réel α dépendent de x.
On dit alors que l'hyperplan $\ell(y) = \alpha$ *sépare le point x et le convexe C*.
Pour tout convexe K dont 0 est un point intérieur (penser à K comme à un translaté de C), on appelle *jauge du convexe K* l'application

$$J_K : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \inf\{a > 0 \,|\, \frac{x}{a} \in K\} \end{array}$$

1. Montrer que J_K est une fonctionnelle sous-linéaire sur E.
2. Montrer que, pour tout $y \in E$, $y \in Int(K)$ si et seulement si $J_K(y) < 1$.
3. Conclure par une application du théorème de Hahn-Banach.

Exercice 7

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert. Nous allons montrer que l'espace $L^1(\Omega)$ n'est pas réflexif. On admet ici que le dual topologique de $L^1(\Omega)$ est $L^\infty(\Omega)$ au sens où:

$$\forall u \in (L^1(\Omega))',\ \exists! g \in L^\infty(\Omega),\ \forall f \in L^1(\Omega),\ u(f) = \int_\Omega fg.$$

On suppose pour simplifier que $0 \in \Omega$. On définit, pour tout $n \geq 1$,

$$f_n = \frac{1}{\mathrm{vol}(B(0, \frac{1}{n}))} \mathbb{1}_{B(0,\frac{1}{n})}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $||f_n||_{L^1} = 1$.
2. Montrer que si $L^1(\Omega)$ était réflexif, il existerait une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ de (f_n) et une fonction $f \in L^1(\Omega)$ telles que, pour toute fonction $g \in L^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_{n_k} g \xrightarrow[k\to+\infty]{} \int_\Omega fg.$$

3. Montrer que si $g \in C_c^0(\Omega \setminus \{0\})$, alors il existe une boule ouverte centrée en 0 telle que $g = 0$ sur cette boule.
4. En déduire que

$$\forall g \in C_c^0(\Omega \setminus \{0\}),\ \int_\Omega fg = 0.$$

5. Montrer que $f = 0$ presque partout sur Ω.
6. En déduire une contradiction avec la question 2 et conclure.

Exercice 8 - Un théorème de Runge

Soit D un ouvert borné et simplement connexe dans $\mathbb{C}$. Soit K un compact simplement connexe inclus dans D et soit $R = \max |\xi|$, $\xi \in K$.
1. Soit $z \in D$, $|z| > R$. Montrer que $\xi \mapsto (z - \xi)^{-1}$ est limite uniforme de fonctions polynômiales en ξ sur K.
2. En déduire que pour tout $z \in D \backslash K$, $\xi \mapsto (z-\xi)^{-1}$ est limite uniforme de fonctions polynômiales en ξ sur K.
3. A l'aide de la formule intégrale de Cauchy, prouver que toute fonction analytique f sur D, $\xi \mapsto f(\xi)$, est limite uniforme sur tout compact de D de fonctions polynômiales en ξ.